Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2016, Blatt 6

Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 28.11.2016, 08:00

Aufgabe 21:

(a) Bestimme alle lokalen Extrema und Sattelpunkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y)^t \longmapsto x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^3 - 2xy^2 + x^2 + y^2.$$

(b) Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y)^t \longmapsto (y - x^2) \cdot (y - 2x^2)$ keine Extremstelle hat, dass aber für jede Gerade $G \subseteq \mathbb{R}^2$ durch $(0, 0)^t$ die Funktion $f_{|G}$ ein isoliertes lokales Minimum in $(0, 0)^t$ besitzt.

Aufgabe 22: Sei $a \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$ und $f : U_\epsilon(a) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung mit $Df(x) = 0$ für alle $x \in U_\epsilon(a)$. Zeige, dass f konstant ist.

Aufgabe 23:

(a) Finde zu $a > 0$ ein Intervall $[c, d]$, so dass die Funktion $f : [c, d] \longrightarrow [c, d],\ x \longmapsto \frac{x}{2} + \frac{a}{2x}$ eine strikte Kontraktion ist und bestimme den Fixpunkt von f.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine q-Kontraktion. Zeige mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass dann die folgende Funktion surjektiv ist:

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2)^t \longmapsto (x_1 + f(x_2), x_2 + f(x_1))^t.$$

Aufgabe 24: Zeige, dass die Verschwindungsmenge $V(f)$ für

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2, y_1, y_2)^t \mapsto \left(x_1^2 + x_2^2 - 2y_1y_2, x_1^3 + x_2^3 + y_1^3 - y_2^3\right)^t$$

lokal in $(-1, 1, 1, 1)$ als Graph einer Abbildung $\varphi : U_\varepsilon(-1, 1) \longrightarrow U_r(1, 1)$ darstellbar ist und berechne $D\varphi(-1, 1)$.