Fachbereich Mathematik | Wintersemester 2016, Blatt 7

Thomas Markwig

Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 5.12.2016, 08:00

Aufgabe 25:

(a) Welcher Punkt in $V(x_1^2+x_2^2-x_3)$ hat den kleinsten Abstand vom Punkt $\left(1,1,\frac{1}{2}\right)^t$?

(b) Es seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Bestimme die Extremstellen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2_{>0} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x_1^p}{p}+\frac{x_2^q}{q}$$

unter der Nebenbedingung $x_1x_2 = 1$. Folgere daraus für $u, v > 0$ die Höldersche Ungleichung $\frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q} \geq uv$.

Aufgabe 26: Zeige, der Ursprung ist ein innerer Punkt des Bildes $\mathrm{Im}(f)$ der Abbildung

$$f : \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) : X \mapsto X^2+X.$$

Aufgabe 27: Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f : \overline{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig auf $\overline{U}$ und stetig differenzierbar auf U. Ferner sei $y \in \mathbb{R}^n$ so, dass $f^{-1}(y) \subseteq U$ und $\det\big(Df(x)\big) \neq 0$ für alle $x \in f^{-1}(y)$. Zeige, dass $f^{-1}(y)$ nur endlich viele Punkte enthält.

Aufgabe 28: Für eine rationale Zahl $x = \frac{a}{b}$ mit $a, b > 0$ setzen wir $N(x) = \frac{b}{\mathrm{ggt}(a,b)}$, d.h. $N(x)$ ist der Nenner von x in gekürzter Form und wir setzen $N(0) = 1$. Untersuche die Funktionen

$$f : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y)^t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{N(x)}, & \text{falls } x, y \in \mathbb{Q} \text{ und } x \neq 0,\\ 0, & \text{sonst,}\end{cases}$$

und

$$g : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y)^t \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x, y \in \mathbb{Q} \text{ mit } N(x) = N(y),\\ 0, & \text{sonst,}\end{cases}$$

bezüglich ihrer Integrierbarkeit auf $[0,1]\times[0,1]$ und bestimme ggf. den Wert des Integrals über diesem Quader.