Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2016, Blatt 9

Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 19.12.2016, 08:00

Aufgabe 33:

(a) Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordan-Nullmenge, dann ist auch der Abschluss $\overline{B}$ eine Jordan-Nullmenge.

(b) Zeige, dass jede beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, die höchstens endlich viele Häufungspunkte besitzt, eine Jordan-Nullmenge ist.

(c) Sei $j \in \{1, \ldots, n\}$, $c \in \mathbb{R}$ und $M \subseteq V(x_j - c) \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt. Zeige, dass M eine Jordan-Nullmenge in $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 34: Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a < b$ und $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ seien fast überall gleich, d.h. es gibt eine Nullmenge N, so dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in [a, b] \setminus N$.

(a) Ist N kompakt und f auf $[a, b]$ integrierbar, so ist auch g auf $[a, b]$ integrierbar.

(b) Sind f und g auf $[a, b]$ integrierbar, so gilt

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dx = \int_{[a,b]} g(x)\, dx.$$

Aufgabe 35: Es sei $[a, b]$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ sei stetig. Zeige,

$$\int_a^b f(x)\, dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}\, dx \geq (b - a)^2.$$

Aufgabe 36: Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar. Zeige, dass für jedes $r > 0$ auch die Menge $rB := \{rx \mid x \in B\}$ Jordan-messbar ist, und dass

$$V(rB) = r^n V(B)$$

gilt.