Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2016, Blatt 10

Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 9.1.2017, 08:00

Aufgabe 37:

Zeige, dass die folgenden Mengen Normalbereiche bezüglich (x_1, x_2) und (x_2, x_1) sind.

(a) $B_1 = \{(x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq x_1\}$.

(b) $B_2 = \{(x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq \sin(x_2),\ 0 \leq x_2 \leq \frac{\pi}{2}\}$.

Aufgabe 38:

(a) Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ der Normalbereich im ersten Quadranten zwischen der Geraden $x_2 = x_1$ und der Parabel $x_2 = x_1^2$. Berechne $\int_B x_1 x_2 \, d(x_1, x_2)$.

(b) Berechne das Volumen des Tetraeders, der von den drei Koordinatenachsen und der Ebene $x_3 = 2 - 2x_1 - x_2$ begrenzt wird.

Aufgabe 39:

(a) Beweise durch Induktion nach n die Gleichung

$$\int_0^1 x^n (1-x)^p \, dx = \frac{n!p!}{(n+p+1)!} \text{ für alle } n, p \in \mathbb{N}.$$

(b) Sei $B = \{(x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$. Zeige: für alle $n, m \in \mathbb{N}$ ist

$$\int_B x_1^n x_2^m \, dx = \frac{n!m!}{(n+m+2)!}.$$

Aufgabe 40: [Das Prinzip von Cavalieri]

Sei $B \subseteq [a, b] \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und für jedes $t \in [a_1, b_1]$ sei der Hyperebenenschnitt $H_t = B \cap V(x_1 - t)$ Jordan-messbar mit Volumen $v(t)$. Zeige zunächst

$$V(B) = \int_{a_1}^{b_1} v(t) \, dt,$$

und zeige für kompaktes B und stetiges $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ zudem

$$\int_B f(x) \, dx = \int_{a_1}^{b_1} \int_{H_t} f(t, y) \, dy \, dt.$$