Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 16.1.2017, 08:00

Aufgabe 41:

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ und $T \in O(3)$ eine orthogonale 3×3-Matrix. Zeige die folgenden Rechenregeln für das Kreuzprodukt:

(a) $\langle x \times y, x\rangle = \langle x \times y, y\rangle = 0$, d.h. $x \times y \perp x$ und $x \times y \perp y$.

(b) $\|x \times y\|_2^2 = \|x\|_2^2\|y\|_2^2 - \langle x, y\rangle^2$.

(c) x und y sind genau dann linear abhängig, wenn $x \times y = 0$ gilt.

(d) $\|Tx \times Ty\|_2 = \|x \times y\|_2$.

(e) Wenn $x_3 = y_3 = 0$, dann gilt

$$\|x \times y\|_2 = \left|\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\right|.$$

(f) $\|x\times y\|_2$ ist der Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms.

Aufgabe 42:

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$ die obere Hälfte der Kugel mit dem Radius R um den Nullpunkt, d.h. $A = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ z \geq 0\}$. Berechne

$$\int_A z \, d(x, y, z).$$

Aufgabe 43:

(a) Sei γ die Helix $\gamma : [0, 4\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (\cos t, \sin t, t)^t$, und sei F das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z)^t \mapsto (yz, xy, 0)^t$. Berechne $\int_\gamma F \cdot \mathbf{dx}$.

(b) Seien $a, b > 0$ und sei γ der Polygonzug durch die Punkte $(0, 0)^t$, $(a, 0)^t$, $(0, b)^t$ und $(0, 0)^t$. Sei außerdem f das Skalarfeld $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y)^t \mapsto xe^{-y}$. Berechne $\int_\gamma f\mathbf{ds}$.

Aufgabe 44:

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen mit $[a, b] \times [c, d] \subset U$ und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

(a) Zeige, die Funktion

$$h : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ (x, y)^t \to \int_a^x f(t, y)dt$$

ist stetig.

(b) Zeige, existiert zudem $D_y f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ und ist stetig, so ist die Funktion

$$g : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ y \to \int_a^b f(t, y)dt$$

stetig differenzierbar mit

$$g'(y) = D_y g(y) = \int_a^b (D_y f)(t, y)dt.$$