Fachbereich Mathematik Wintersemester 2016, Blatt 12
Thomas Markwig

Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 23.1.2017, 08:00

Aufgabe 45:

(a) Sei $\gamma : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (1, \frac{e^t+e^{-t}}{2})^t$ und $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \mapsto y$. Berechne $\int_\gamma f ds$.

(b) Sei $\gamma : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (1, t, \ln(t))^t$ und $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto y^{-3}$. Berechne $\int_\gamma f ds$.

Aufgabe 46: Zeige, ist B ein $\mathcal{C}^1$-Normalbereich mit positiv orientierter Parametrisierung γ des Randes und ist $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x,y)^t \mapsto \frac{(-y,x)^t}{2}$, dann ist $\int_\gamma f \cdot \mathbf{dx}$ der Flächeninhalt von B.

Aufgabe 47: Seien $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) Zeige, ist h zweifach stetig differenzierbar, dann gilt $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(h)) = 0$.

(b) Zeige, ist f zweifach stetig differenzierbar, dann gilt $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(f)) = 0$.

(c) Zeige, sind f, g, h stetig differenzierbar, dann gelten

$$\mathrm{rot}(h \cdot f) = h \cdot \mathrm{rot}(f) + \mathrm{grad}(h) \times f$$

und

$$\mathrm{div}(f \times g) = \langle g, \mathrm{rot}(f) \rangle - \langle f, \mathrm{rot}(g) \rangle.$$

Aufgabe 48: Seien $F, G : U \longrightarrow \mathbb{R}$ zweifach stetig differenzierbar Skalarfelder mit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und sei $B \subseteq U$ ein $\mathcal{C}^1$-Normalbereich.

(a) Zeige, $\int_B \Delta(F)(x,y)\, d(x,y) = \oint_{\partial B} \frac{\partial F}{\partial n} ds$, wobei $\frac{\partial F}{\partial n}$ die Richtungsaleitung von F in Richtung des äußeren Normaleneinheitsvektors ist.

(b) Zeige, $\int_B (F \cdot \Delta(G) + \langle \nabla F, \nabla G \rangle)(x,y)\, d(x,y) = \oint_{\partial B} F \cdot \frac{\partial G}{\partial n} ds$.

(c) Zeige, $\int_B (F \cdot \Delta(G) - G \cdot \Delta(F))(x,y)\, d(x,y) = \oint_{\partial B} F \cdot \frac{\partial G}{\partial n} - G \cdot \frac{\partial F}{\partial n} ds$.