Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 30.1.2017, 08:00

Aufgabe 49: Sei $\mathcal{F}$ die Oberfläche des Einheitswürfels mit den Eckpunkte $(0,0,0)^t$ und $(1,1,1)^t$. Berechne das Oberflächenintegral $\int_{\mathcal{F}} f \cdot \mathbf{dS}$ für das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (x,y,z)^t \mapsto (4xz, -y^2, yz)^t.$$

Aufgabe 50: Sei $\mathcal{F}$ die Oberfläche der nördlichen Hemisphäre der Einheitskugel mit Mittelpunkt im Ursprung und sei $q = (0,0,z)$ ein fester Punkt mit $z > 1$. Berechne das Oberflächenintegral $\int_{\mathcal{F}} f \; dS$ für das Skalarfeld

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : p \mapsto ||p - q||_2.$$

Aufgabe 51: Sei $\mathcal{F}$ wie in Aufgabe 50 und sei

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (x,y,z)^t \mapsto (1, xz, xy)^t.$$

Berechne das Oberflächenintegral $\int_{\mathcal{F}} \mathrm{rot}(f) \cdot \mathbf{dS}$.

Aufgabe 52: Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine stetig differenzierbare Funktion und sei $\mathcal{F}$ die glatte Fläche im $\mathbb{R}^3$, die entsteht, indem man den Graphen von f um die x-Achse rotieren läßt. Zeige, daß der Oberflächeninhalt von $\mathcal{F}$ durch die folgende Formel berechnet werden kann:

$$I(\mathcal{F}) = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} \; dx.$$