Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 6.2.2017, 08:00

Aufgabe 53: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $h : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $a, b \in I$. Zeige,

$$\left|\left|\int_a^b h(s)\,ds\right|\right|_2 \leq \int_a^b ||h(s)||_2\,ds.$$

Aufgabe 54: Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig und sei $x : (t_-, t_+) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine maximale Lösung von $\dot{x} = f(x)$. Zeige, wenn x beschränkt ist, dann ist $(t_-, t_+) = \mathbb{R}$.

Aufgabe 55:

a. Gegeben sei ein Fluß mit der Abbildungsvorschrift

$$\varphi(t, x_1, x_2) = \left(x_1 \cdot e^t, \tfrac{x_2}{1-x_2 t}\right)^t.$$

Bestimme eine Differentialgleichung, deren zugehöriger Fluß φ ist.

b. Zeige, daß durch die Abbildungsvorschrift

$$\varphi(t, x) = \frac{x \cdot e^t}{x \cdot e^t - x + 1}$$

ein Fluß auf $[0, 1]$ definiert wird.

c. Sei $\varphi : \Omega \longrightarrow U$ ein Fluß und seien $\eta_0 \in U$ und $T > 0$ mit $\varphi^T(\eta_0) = \eta_0$. Zeige, dann gilt $\varphi^T(\eta) = \eta$ für alle η in der Bahn η_0^φ von η_0.

Aufgabe 56: Berechne die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{t}.$$