

## Mehrdimensionale Analysis

### § 15 Mehrdimensionale Differentialrechnung

Wir wollen in diesem Abschnitt einige Aspekte der Differentialrechnung von Abbildungen von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$  oder nach  $\mathbb{R}^m$  ansprechen. Naturgemäß müssen wir uns dabei sehr knapp fassen.

**Bemerkung 15.1** (Koordinaten auf  $\mathbb{R}^n$ )

Die Punkte im  $\mathbb{R}^n$  sind Vektoren der Form  $(x_1, \dots, x_n)^t$ . Wenn wir uns die  $x_i$  variabel denken, so können wir diese als Koordinaten der Punkte verwenden.

Wenn wir in  $\mathbb{R}^2$  arbeiten, werden wir statt der Koordinaten  $x_1$  und  $x_2$  meist  $x$  und  $y$  verwenden. Ebenso werden wir im  $\mathbb{R}^3$  meist die Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$  verwenden statt  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$ .

Eine Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_n)^t \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$$

hängt dann von  $n$  Veränderlichen ab.

Eine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m : (x_1, \dots, x_n)^t \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

hat zudem  $m$  Komponentenfunktionen  $f_1, \dots, f_m$ , die jeweils von  $n$  Koordinaten abhängen.

**Beispiel 15.2**

a. Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y)^t \mapsto x^2 \cdot \cos(x \cdot y)$$

ist ein Beispiel für eine Funktion von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}$ , die von den Koordinaten  $x$  und  $y$  abhängt.

b. Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y)^t \mapsto (x + y, x \cdot y)^t$$

ist ein Beispiel für eine Abbildung von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$ . Sie hat die Komponentenfunktionen

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y)^t \mapsto x + y$$

und

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y)^t \mapsto x \cdot y.$$

- c. Ist  $A \in \text{Mat}(\mathbf{m} \times \mathbf{n}, \mathbb{R})$  eine  $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ -Matrix, so definiert das Produkt von  $A$  mit dem Koordinatenvektor  $(x_1, \dots, x_n)^t$  eine Abbildungsvorschrift für eine Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$ . Solche Abbildungen heißen *linear* und sind besonders einfach. Z.B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

definiert die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + y + 2z \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung 15.3** (Partielle Differenzierbarkeit)

Hängt eine Funktion  $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  von mehreren Veränderlichen ab, so kann man alle bis auf eine festhalten und nur die eine variieren. Dann wird daraus eine Funktion, die nur von der einen Veränderlichen  $x_i$  abhängt. Für diese kann man die Frage aufwerfen, ob sie bezüglich der einen Variablen  $x_i$  differenzierbar ist und man kann ggf. die Ableitung nach  $x_i$  berechnen, indem man alle anderen Variablen wie Konstanten behandelt. Man erhält dann die sogenannte *partielle Ableitung* nach  $x_i$ , für die die folgenden Bezeichnungen üblich sind

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = D_i f = f_{x_i} = \partial_i f.$$

Wir erhalten auf dem Weg  $n$  partielle Ableitungen, die man kompakter Weise in einem Vektor sammelt, dem sogenannten *Gradienten* von  $f$

$$\text{grad}(f) = \nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = (D_1 f, \dots, D_n f).$$

Bei einer Abbildung  $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  mit Komponentenfunktionen  $f_1, \dots, f_m$  können wir das obige Verfahren für jede Komponentenfunktion machen und erhalten so insgesamt  $m$  dieser Vektoren, die wir der Übersichtlichkeit halber als Zeilen in eine Matrix schreiben, die sogenannte *Jacobi-Matrix* von  $f$

$$Jf := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 & \dots & D_n f_1 \\ D_1 f_2 & D_2 f_2 & \dots & D_n f_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_1 f_m & D_2 f_m & \dots & D_n f_m \end{pmatrix}.$$

Für ein festes  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  ist definiert die Jacobi-Matrix  $Jf(\mathbf{a})$  gemäß Beispiel 15.2 eine lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$ . Aus dieser ergibt sich die *lineare Approximation* an  $f$  als

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m: x \mapsto f(\mathbf{a}) + Jf(\mathbf{a}) \cdot (x - \mathbf{a}),$$

eine Formel, die uns an die Tangentengleichung und damit an die lineare Approximation im Eindimensionalen erinnert.

**Definition 15.4** (Partielle Differenzierbarkeit)

Eine Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt *partiell differenzierbar* auf  $\mathbb{R}^n$ , wenn die Komponentenfunktionen von  $f$  nach allen Koordinaten differenzierbar sind. Die Jacobi-Matrix von  $f$  heißt dann auch die *Ableitung* von  $f$ . Insbesondere ist also für eine Funktion von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$  der Gradient von  $f$  die Ableitung von  $f$ .

**Beispiel 15.5**

- a. Die Funktion in Beispiel 15.2 ist partiell differenzierbar auf  $\mathbb{R}^2$  mit der Ableitung

$$\text{grad}(f)(x, y) = (2x \cdot \cos(xy) - x^2y \cdot \sin(xy), -x^3 \cdot \sin(xy)).$$

- b. Die Abbildung in Beispiel 15.2 ist ebenfalls partiell differenzierbar auf  $\mathbb{R}^2$  mit der Ableitung

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung 15.6** (Höhere Ableitungen)

Wenn wir eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  haben, die partiell differenzierbar ist, so können wir ihren Gradienten als Abbildung

$$\text{grad}(f) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \right)$$

auffassen. Wenn die Komponentenfunktionen wieder partiell differenzierbar sind, erhalten wir als Ableitung dieser Abbildung eine  $n \times n$ -Matrix, die sogenannte *Hesse-Matrix* von  $f$

$$H_f := \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} D_1 D_1 f & D_1 D_2 f & \dots & D_1 D_n f \\ D_2 D_1 f & D_2 D_2 f & \dots & D_2 D_n f \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_n D_1 f & D_n D_2 f & \dots & D_n D_n f \end{pmatrix}$$

Diese Matrix betrachtet man als die *zweite Ableitung* von  $f$ . Sind die Komponentenfunktionen dieser Matrix stetige Funktionen, so nennen wir  $f$  *zweifach stetig differenzierbar*.

**Satz 15.7** (Schwarz)

Ist  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  zweifach stetig differenzierbar, so gilt für alle  $1 \leq i, j \leq n$

$$D_i D_j f = D_j D_i f.$$

Das heißt, die Hesse-Matrix  $H_f$  ist eine symmetrische Matrix.

**Beispiel 15.8**

Die Polynomfunktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y)^t \mapsto 3x^5 + 2x^3y + 5y$$

ist partiell differenzierbar auf  $\mathbb{R}^2$ . Ihre partiellen Ableitungen

$$D_1 f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto D_1 f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 15x^4 + 6x^2y$$

und

$$D_2f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto D_2f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^3 + 5$$

sind ebenfalls partiell differenzierbar auf  $\mathbb{R}^2$ . Wir können also auch von diesen wieder die partiellen Ableitungen bilden und erhalten:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} D_1D_1f(x, y) & D_2D_1f(x, y) \\ D_1D_2f(x, y) & D_2D_2f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60x^3 + 12xy & 6x^2 \\ 6x^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also wie im Satz von Schwartz behauptet

$$D_2D_1f(x, y) = 6x^2 = D_1D_2f(x, y).$$

### Bemerkung 15.9 (Extrema)

Wir wollen nun analog zur eindimensionalen Analysis ein notwendiges und ein hinreichendes Kriterium dafür definieren, daß eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  ein lokales Minimum oder Maximum in einem Punkt  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  hat. Die Definition der Begriffe Extremum, lokales Minimum und lokales Maximum ist dabei analog zum Eindimensionalen gebildet werden. Z.B.:  $f$  hat in  $\mathbf{a}$  ein *lokales Maximum*, wenn es ein  $\delta > 0$  gibt, so daß  $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$  für alle Punkte  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  mit Abstand kleiner als  $\delta$  von  $\mathbf{a}$  gilt.

### Satz 15.10 (Notwendige Bedingung für Extremstellen)

Ist  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und ist  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  eine Extremstelle von  $f$ , so ist

$$\text{grad}(f)(\mathbf{a}) = (0, \dots, 0),$$

d.h. die Ableitung an einer Extremstelle ist null.

### Satz 15.11 (Hinreichende Bedingung für Extremstellen)

Es sei  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  zweifach stetig differenzierbar und  $\text{grad}(f)(\mathbf{a}) = (0, \dots, 0)$ .

- Ist die Hesse-Matrix  $H_f(\mathbf{a})$  positiv definit, so hat  $f$  in  $\mathbf{a}$  ein lokales Minimum.
- Ist die Hesse-Matrix  $H_f(\mathbf{a})$  negativ definit, so hat  $f$  in  $\mathbf{a}$  ein lokales Maximum.
- Ist die Hesse-Matrix  $H_f(\mathbf{a})$  indefinit, so ist  $\mathbf{a}$  ein Sattelpunkt von  $f$  und keine Extremstelle.

### Beispiel 15.12

- Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto x_1^2 + x_2^2$$

hat den Gradienten

$$Df(\mathbf{x}) = (2x_1, 2x_2),$$

so daß  $\mathbf{x} = (0, 0)^t$  der einzige kritische Punkt ist. In diesem Punkt ist die Hesse-Matrix

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

positiv definit. Also ist der Punkt  $(0, 0)^t$  ein isoliertes lokales Minimum von  $f$  (siehe Abbildung 1). Es ist in der Tat sogar ein globales Minimum, da  $f(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0 = f(0, 0)$  für alle  $x \neq (0, 0)^t$ .

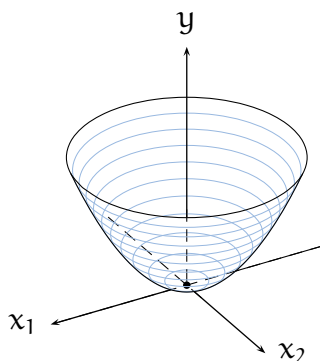


ABBILDUNG 1. Das isolierte Minimum von  $x \mapsto x_1^2 + x_2^2$

b. Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x_1^2 - x_2^2$$

hat den Gradienten

$$Df(x) = (2x_1, -2x_2),$$

so daß wieder  $x = (0, 0)^t$  der einzige kritische Punkt ist. In diesem Punkt ist die Hesse-Matrix

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

indefinit. Satz 15.11 sagt also, daß  $(0, 0)^t$  keine Extremstelle ist, sondern, daß  $f$  in  $(0, 0)^t$  einen Sattelpunkt hat (siehe Abbildung 2).

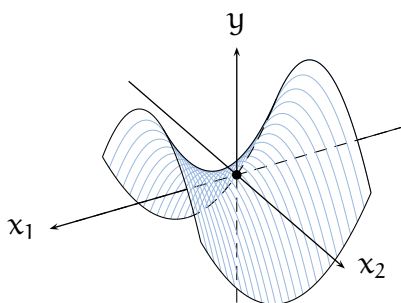


ABBILDUNG 2. Der Sattelpunkt von  $x \mapsto x_1^2 - x_2^2$

**Bemerkung 15.13** (Umkehrsatz für stetig differenzierbare Funktionen)

Ist eine Funktion  $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar mit  $f'(x) \neq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ , so ist die stetige Funktion  $f' : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$  wegen des Zwischenwertsatzes 8.12 entweder stets positiv oder stets negativ. Wegen des Kriteriums für Monotonie 9.19 ist die Funktion  $f$  dann aber streng monoton und wegen des Umkehrsatzes für streng monotone Funktionen 8.19 besitzt  $f$  eine Umkehrfunktion

$$f^{-1} : (c, d) \longrightarrow (a, b).$$

Der Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion 9.9 sichert uns zu, daß diese sogar differenzierbar ist, und wir können zudem die Ableitung der Umkehrfunktion berechnen, ohne diese wirklich zu kennen; für  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$  gilt nämlich

$$(f^{-1})'(\mathbf{y}) = \frac{1}{f'(\mathbf{x})} = (f'(\mathbf{x}))^{-1}. \quad (15)$$

Kann man diese Aussagen für Abbildungen von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^n$  verallgemeinern? Global nicht, aber lokal wohl! Das ist die Aussage des wichtigen Satzes über die Umkehrfunktion.

**Satz 15.14** (Satz über die Umkehrabbildung)

*Ist  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig differenzierbare Funktion mit  $\det(\mathbf{J}f(\mathbf{c})) \neq 0$ , dann besitzt  $f$  auf einer kleinen Umgebung von  $\mathbf{c}$  eine Umkehrabbildung  $f^{-1}$ . Diese ist zudem stetig differenzierbar mit*

$$\mathbf{J}(f^{-1})(f(\mathbf{c})) = (\mathbf{J}f(\mathbf{c}))^{-1},$$

*d.h. die Ableitung der Umkehrabbildung im Punkt  $f(\mathbf{c})$  ist die Inverse der Ableitung von  $f$  in  $\mathbf{c}$ .*

**Beispiel 15.15**

Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (\mathbf{x}, \mathbf{y})^t \mapsto (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + 2\mathbf{y})^t$$

ist stetig differenzierbar mit Ableitung

$$\mathbf{J}f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für die Determinante der Ableitung in jedem Punkt  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})^t$  gilt also

$$\det(\mathbf{J}f(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1 \neq 0.$$

Der Satz über die Umkehrabbildung sichert uns also lokal in jedem Punkt die Existenz einer stetig differenzierbaren Umkehrabbildung deren Ableitung

$$(\mathbf{J}f(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung von  $f$  und von  $f^{-1}$  hängen also beide gar nicht von der Stelle  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})^t$  ab, an der sie berechnet werden. Das ist nicht verwunderlich, denn die Abbildung  $f$  ist eine lineare Abbildung, die als Produkt mit der Matrix  $\mathbf{J}f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  geschrieben werden kann

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{y} \\ \mathbf{x} + 2\mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}.$$

Da die Matrix invertierbar ist, besitzt  $f$  in diesem Fall sogar global eine Umkehrfunktion, die durch die Inverse der Matrix dargestellt werden kann als

$$f^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ y - x \end{pmatrix}.$$

Die Umkehrabbildung ist also wieder eine lineare Abbildung und ihre Ableitung damit gerade die Matrix, die in der Abbildungsvorschrift verwendet wurde. Letzteres gilt allgemein für lineare Abbildungen.

**Beispiel 15.16** (Polarkoordinaten)

Wir betrachten die Polarkoordinatenabbildung

$$f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (r, \theta)^t \mapsto (r \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta))^t.$$

Diese ist stetig differenzierbar auf ihrem Definitionsbereich und die Ableitungsdeterminante

$$\det(Df(r, \theta)) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \cdot \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cdot \cos(\theta) \end{vmatrix} = r \cdot (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) = r > 0$$

ist stets positiv. Global auf ihrem Definitionsbereich kann die Abbildung keine Umkehrabbildung besitzen, da

$$f(r, \theta) = f(r, \theta + 2\pi)$$

für alle  $(r, \theta)$  im Definitionsbereich.  $f$  besitzt deshalb *global* keine Umkehrabbildung.

Der Satz über die Umkehrabbildung 15.14 sichert uns aber lokal in jedem Punkt  $(r, \theta)$  die Existenz einer stetig differenzierbaren Umkehrabbildung zu. In diesem Beispiel wäre die Menge aller Punkte, die Abstand kleiner als  $\frac{\pi}{2}$  von  $(r, \theta)$  haben, eine zulässige Umgebung, auf der die Umkehrabbildung existiert.

Wir können zudem die Ableitung der Umkehrabbildung berechnen, ohne die Abbildungsvorschrift<sup>1</sup> der Umkehrabbildung zu kennen, nämlich als

$$Df^{-1}(f(r, \theta)) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \cdot \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r} \cdot \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\theta) & r \cdot \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

### Aufgabe 15.17

Berechne den Gradienten und die Hesse-Matrix für die folgenden Funktionen  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ :

- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ .
- $f(x, y, z) = 3x \cdot \exp(xz) + y^3$ .
- $f(x, y, z) = x^2 y \cdot \cos(z)$ .

### Aufgabe 15.18

Berechne die Jacobi-Matrix für die folgenden Abbildungen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

- $f(x, y) = (x + 3y, xyz, z^2 - x)$ .
- $f(x, y) = (\exp(xyz), x^2 y - z^2, z)$ .

### Aufgabe 15.19

Für  $A \in \text{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$  sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  als Multiplikation des Koordinatenvektors  $(x_1, \dots, x_n)^t$  mit  $A$  definiert. Berechne die Ableitung  $Jf(x_1, \dots, x_n)$ .

Alternativ kann man die Aufgabe für die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

lösen.

<sup>1</sup>Im vorliegenden Beispiel kann man eine geschlossene Formel für die Umkehrabbildung angeben. Diese enthält aber den Arcustangens, dessen Abbildungsvorschrift wir auch nicht kennen — es sei denn, Aufgabe 10.24 wurde erfolgreich gelöst. Um die Umkehrabbildung zu berechnen, geht man wie folgt vor: man kann einen Punkt  $(x, y)^t \in \mathbb{R}^2$  mit  $x > 0$  in Polarkoordinaten  $(r, \theta)$  angeben mit

$$r = \|(x, y)^t\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

und

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{y}{x}.$$

Die Funktion

$$f_1 : (0, \infty) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (0, \infty) \times \mathbb{R}$$

hat also die Umkehrabbildung

$$f_1^{-1} : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : (x, y)^t \mapsto \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right).$$

Wir überlassen es dem Leser, die Ableitung im Punkt  $f(r, \theta)$  mit Hilfe dieser Formel nachzurechnen.



**Aufgabe 15.20**

Bestimme alle lokalen Extrema und Sattelpunkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y)^t \longmapsto x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^3 - 2xy^2 + x^2 + y^2.$$

**Aufgabe 15.21**

Bestimme alle lokalen Extrema und Sattelpunkte der folgenden Funktion

$$f : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y)^t \mapsto \frac{1}{x} - \frac{9}{y} + x - y.$$

**§ 16 Mehrdimensionale Integralrechnung**

Wir wollen in diesem Abschnitt einige Aspekte der Integralrechnung von Abbildungen von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$  oder nach  $\mathbb{R}$  ansprechen. Unser Ziel dabei ist es, zu erläutern, wie man einfache mehrdimensionale Integrale als Mehrfachintegrale berechnen kann.

**Bemerkung 16.1** (Idee des mehrdimensionalen Riemann-Integrals)

Um das Integral einer Funktion  $f : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \longrightarrow \mathbb{R}$  im Eindimensionalen zu definieren, haben wir Zerlegungen des Intervalls  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  betrachtet sowie Ober- und Untersummen bezüglich dieser Zerlegungen. Die natürliche Verallgemeinerung des Intervalls im  $\mathbb{R}^n$  ist der  $n$ -dimensionale Quader

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] := [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1] \times \dots \times [\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n] = \{(x_1, \dots, x_n)^t \mid \mathbf{a}_i \leq x_i \leq \mathbf{b}_i\},$$

für den wir dieselbe Bezeichnung verwenden, wenn  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)^t$  und  $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)^t$  ist.

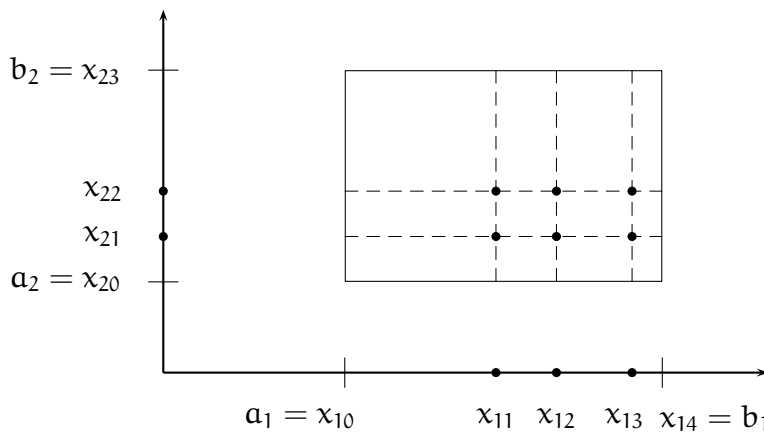


ABBILDUNG 3. Zerlegung eines 2-dimensionalen Quaders

Man kann dann analog Ober- und Untersummen bilden, indem man auf einem Teilquader das Supremum bzw. das Infimum der Funktionswerte mit dem Volumen des Teilquaders multipliziert und summiert. Die Theorie der eindimensionalen Integration geht dann eins zu eins durch. Allerdings war schon im Eindimensionalen die Definition des Integrals ungeeignet um Integrale wirklich zu berechnen. Dort hatten wir statt dessen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, der die Integration auf die Bestimmung einer Stammfunktion zurück geführt hat. Für

Funktionen von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$  gibt es leider keinen analogen Stammfunktionsbegriff. Dafür haben wir aber den Satz von Fubini, der es uns erlaubt, die Berechnung eines  $n$ -dimensionalen Integrals auf die Berechnung von  $n$  eindimensionalen Integralen zurück zu führen, für die wir dank der Stammfunktionen oft wissen, was zu tun ist!

**Satz 16.2** (Der Satz von Fubini)

Es seien  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  mit  $\mathbf{a} < \mathbf{b}$  und  $f: [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist

$$\int_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n.$$

Zudem darf die Reihenfolge der Integration auf der rechten Seite beliebig vertauscht werden.

**Beispiel 16.3**

Wir wollen als einfaches Beispiel das Integral der Funktion

$$f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto x_1 + x_2$$

auf dem Quader  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$  berechnen:

$$\begin{aligned} \int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_0^1 \int_0^1 x_1 + x_2 \, dx_1 \, dx_2 = \int_0^1 \left. \frac{x_1^2}{2} + x_1 x_2 \right|_0^1 dx_2 \\ &= \int_0^1 \left. \frac{1}{2} + x_2 \right|_0^1 dx_2 = \left. \frac{x_2}{2} + \frac{x_2^2}{2} \right|_0^1 = 1. \end{aligned}$$

**Bemerkung 16.4** (Normalbereiche)

Im Eindimensionalen waren die Intervalle und Vereinigungen von Intervallen die einzigen wirklich interessanten Teilmengen, so daß es für die Integration reichte, zu verstehen, wie man über Intervallen integriert. Im Mehrdimensionalen gibt es aber viele interessante Mengen, die keine Quader sind und über denen es interessant wäre das Integral einer Funktion berechnen zu können: z.B. über Kreisen oder Dreiecken.

Der Einheitskreis um den Ursprung ist die Menge der Punkte

$$K = \{(x, y)^t \mid x^2 + y^2 \leq 1\} = \{(x, y)^t \mid -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

und das Dreieck mit den Eckpunkten  $(0, 0)^t$ ,  $(1, 0)^t$  und  $(1, 1)^t$  ist die Menge der Punkte

$$D = \{(x, y)^t \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}.$$

Mengen der Gestalt

$$B = \{(x, y)^t \mid \mathbf{a} \leq x \leq \mathbf{b}, \psi(x) \leq y \leq \varphi(x)\} \quad (16)$$

für stetige Funktionen  $\psi$  und  $\varphi$  auf  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  nennt man *Normalbereiche*. Für Normalbereiche haben wir wieder einen entsprechenden Satz von Fubini, der das mehrdimensionale Integral auf mehrere eindimensionale zurück führt. Zwar gilt dies alles auch im  $\mathbb{R}^n$ , um die Notation übersichtlich zu halten, beschränken wir uns hier aber auf den  $\mathbb{R}^2$ .

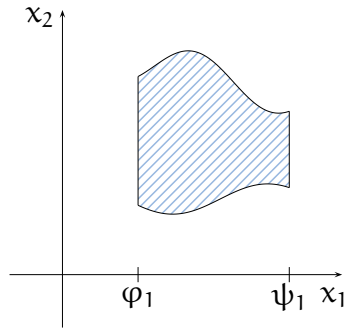


ABBILDUNG 4. Normalbereiche

**Satz 16.5** (Der Satz von Fubini für Normalbereiche)

Ist  $B$  ein Normalbereich wie in (16) und ist  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so gilt

$$\int_B f(x) \, dx = \int_a^b \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y) \, dy \, dx.$$

**Beispiel 16.6**

Die Menge

$$B = \{(x, y)^t \mid -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$$

ist der in Abbildung 5 skizzierte Normalbereich. Wir können nun mit Hilfe des Satzes

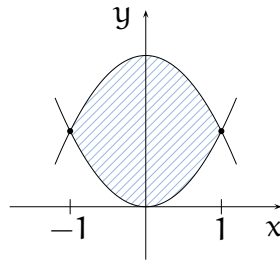


ABBILDUNG 5. Der Normalbereich aus Beispiel 16.6

von Fubini 16.5 die stetige Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y)^t \mapsto y$$

über  $B$  integrieren:

$$\begin{aligned} \int_B y \, d(x, y) &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^{2-x^2} y \, dy \, dx = \int_{-1}^1 \frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^{2-x^2} \, dx \\ &= \int_{-1}^1 2 - 2x^2 \, dx = 2x - \frac{2x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

**Bemerkung 16.7** (Transformationssatz für Integrale)

Neben dem Satz von Fubini gibt es als weiteres wichtiges Hilfsmittel, mehrdimensionale Integrale zu berechnen, den Transformationssatz für Integrale. Es handelt sich dabei um eine Verallgemeinerung der Substitutionsregel

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(z) \, dz = \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \, dx.$$

Im Eindimensionalen mußte man für die Substitution

$$z = \varphi(x)$$

nur voraussetzen, daß  $\varphi$  stetig differenzierbar ist. Im Mehrdimensionalen reicht das nicht.

Die Grundidee hier ist, daß die Substitution

$$z = \varphi(x)$$

im wesentlichen eine *Koordinatentransformation* des einen Integrationsbereiches auf den anderen sein sollte. Als typisches Beispiel denken wir dabei an die Polarkoordinaten

$$\varphi : [0, R] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (r, \theta) \mapsto (r \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta)),$$

das das Rechteck  $[0, R] \times [0, 2\pi]$  in den Kreis transformiert.

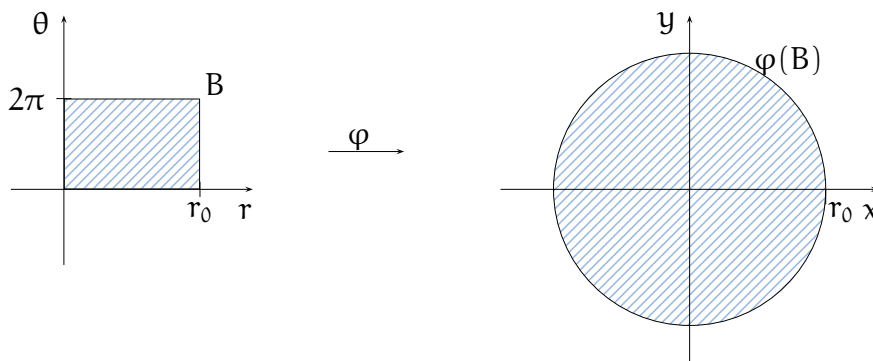


ABBILDUNG 6. Transformation eines Rechtecks auf einen Kreis

Wenn man sich dabei auf das kartesische Produkt der offenen Intervalle beschränkt, so ist  $\varphi$  stetig differenzierbar mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung. In diesem Sinne ist  $\varphi$  eine Koordinatentransformation auf dem kartesischen Produkt der offenen Intervallen. Auf dem Rand des Rechtecks stimmt das nicht ganz, aber der Rand ist vernachlässigbar wenig. Für solche Situationen läßt sich die Substitutionsregel wie folgt verallgemeinern,  $\overset{\circ}{Q}$  den Quader  $Q$  ohne seinen Rand bezeichnet.

**Satz 16.8** (Transformationssatz für Integrale auf Quadern)

$\varphi : Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$  sei stetig differenzierbar auf dem Quader  $Q$  im  $\mathbb{R}^n$  mit  $\det(J\varphi(x)) \neq 0$  für alle  $x \in \overset{\circ}{Q}$  und  $\varphi$  besitze auf  $\overset{\circ}{Q}$  eine Umkehrabbildung. Ferner sei  $f : \varphi(Q) \longrightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann gilt

$$\int_{\varphi(Q)} f(z) \, dz = \int_Q f(\varphi(x)) \cdot |\det(J\varphi)(x)| \, dx.$$

**Beispiel 16.9** (Polarkoordinaten)

Die Polarkoordinatenabbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (r, \theta)^t \mapsto (r \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta))$$

eingeschränkt auf die offene Menge

$$U = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$$

in  $\mathbb{R}^2$  ist eine Koordinatentransformation mit

$$\det(D\varphi(r, \theta)) = r > 0$$

für alle  $r \in (0, \infty)$ . Wir wählen nun ein abgeschlossenes, achsenparalleles Rechteck

$$B = [r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2].$$

Das Bild von  $B$  unter  $\varphi$  ist dann ein Ausschnitt aus einem Kreisring, wie in Abbildung 7 dargestellt. Für eine auf  $\varphi(B)$  stetige Funktion gilt dann

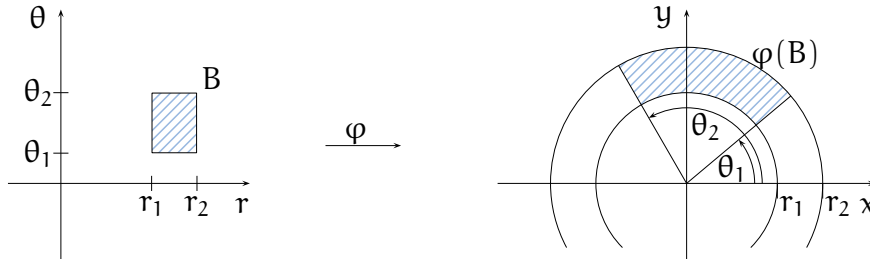


ABBILDUNG 7. Transformation eines Rechtecks auf einen Kreisringausschnitt

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(B)} f(x, y) \, d(x, y) &= \int_B f(\varphi(r, \theta)) \cdot |D\varphi(r, \theta)| \, d(r, \theta) \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta)) \cdot r \, dr \, d\theta. \end{aligned} \quad (17)$$

Insbesondere können wir damit den Inhalt des Kreisbogenschnitts berechnen:

$$V(\varphi(B)) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} r \, dr \, d\theta = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} \cdot (\theta_2 - \theta_1).$$

Wegen des Transformationssatzes für Integrale auf Quadern 16.8 gilt die Transformationsformel (17) auch auf dem Quader

$$B = [0, r_0] \times [0, 2\pi],$$

und wir können somit den Inhalt eines Kreises mit Radius  $r_0$

$$\varphi(B) = \{(x, y)^t \mid x^2 + y^2 \leq r_0^2\}$$

ausrechnen als

$$V(\varphi(B)) = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} r \, d\theta \, dr = \pi \cdot r_0^2.$$

### Aufgabe 16.10

Berechne das folgende Integral:

$$\int_{[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]} \sin(x + y) \, d(x, y)$$

**Aufgabe 16.11**

Berechne das folgende Integral:

$$\int_{[0,1] \times [0,1] \times [0,1]} \frac{x^3 y^2}{1+z^2} d(x, y, z).$$

**Aufgabe 16.12**

Sei  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  der Normalbereich im ersten Quadranten zwischen der Geraden  $y = x$  und der Parabel  $y = x^2$ . Berechne  $\int_B xy d(x, y)$ .

**Aufgabe 16.13**

Berechne das Volumen des Tetraeders, der von den drei Koordinatenachsen und der Ebene  $z = 2 - 2x - y$  begrenzt wird.

**Aufgabe 16.14** (Zylinderkoordinaten)

Berechne die Determinante der Ableitung der Zylinderkoordinatenabbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (r, \theta, z) \mapsto (r \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta), z)$$

und zeige, daß sie auf dem Quader

$$Q = [0, \infty] \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$$

ohne den Rand stets positiv ist und daß  $\varphi$  dort eine Umkehrabbildung besitzt. Verwende dann den Transformationssatz, um das Volumen des Zylinders

$$Z = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq r_0^2, 0 \leq z \leq z_0\}$$

zu berechnen.

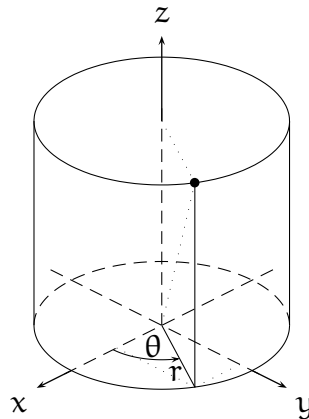


ABBILDUNG 8. Zylinderkoordinaten

**Aufgabe 16.15** (Kugelkoordinaten)

Berechne die Determinante der Ableitung der Kugelkoordinatenabbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (r, \theta, \vartheta) \mapsto (r \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\vartheta), r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\vartheta), r \cdot \sin(\vartheta))$$

und zeige, daß sie auf dem Quader

$$Q = [0, \infty] \times [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

ohne den Rand stets positiv ist und daß  $\varphi$  dort eine Umkehrabbildung besitzt. Verwende dann den Transformationssatz, um das Volumen der Kugel

$$K = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r_0^2\}$$

zu berechnen.

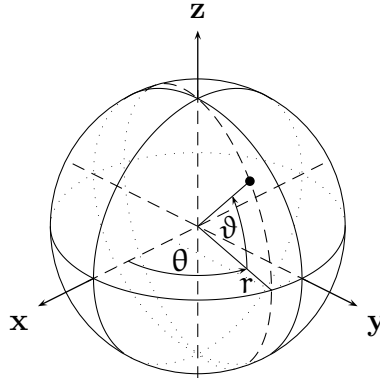


ABBILDUNG 9. Kugelkoordinaten

