

Vorkurs Mathematik

Aufgaben zum Themenkomplex Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

Aufgabe 1: Bestimme den größtmöglichen Definitionsbereich D von $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit:

a. $f(x) = \frac{x + \frac{1}{x}}{x}$.

b. $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{x^2 + x - 2}$.

Welche Werte kann die Funktion annehmen, d.h. was ist das Bild der Funktion?

Aufgabe 2: Berechne die folgenden Grenzwerte:

a. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2}$.

b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x + 3}{2x + 1}$.

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x})$.

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$.

Aufgabe 3: Bestimme das Minimum und das Maximum der stetigen Funktion

$$f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 1 - 2x - x^2.$$

Aufgabe 4: Überprüfe, ob die folgenden Funktionen f eine Umkehrfunktion besitzen und bestimme diese gegebenenfalls.

a. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + 2$.

b. $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1\} : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}$.

Aufgabe 5: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $L \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeige, wenn $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, so ist f stetig in \mathbb{R} .

Aufgabe 6: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung mit $\text{Im}(f) \subseteq [a, b]$. Zeige, daß f einen Fixpunkt hat, d.h. es gibt ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = c$.

Aufgabe 7: Ich fahre morgens mit dem Auto von zu Hause zur Arbeit und nachmittags fahre ich mit dem Auto auf dem gleichen Weg zurück. Wenn ich für beide Strecken exakt die gleiche Zeit benötige, gibt es dann eine Stelle auf der Strecke, die ich auf dem Hinweg und auf dem Rückweg jeweils nach derselben Zeit erreiche?