Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2013, Blatt 6
Pablo Luka, Yue Ren

Vorkurs Mathematik

Aufgaben zu Matrizen, Determinanten, mehrdimensionaler Differentialrechnung

1) Matrizen

Aufgabe 1: Berechne die folgenden Summen von Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: Welche der folgenden Matrizen können in welcher Reihenfolge miteinander multipliziert werden? Berechne ggf. das Matrixprodukt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: Berechne für jede der Matrizen in Aufgabe 2 eine reduzierte Zeilen-Stufen-Form.

Aufgabe 4: Berechne eine reduzierte Zeilen-Stufen-Form der folgenen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -7 & 10 & -1 \\ -2 & 4 & -7 & 2 \\ 3 & -5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

Aufgabe 5: Berechne den Rang der folgenden Matrix in Abhängigkeit von a und b:

$$\begin{pmatrix} 0 & b & b & b \\ a & 0 & b & b \\ a & a & 0 & b \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 4, \mathbb{R}).$$

2) Determinanten

Aufgabe 6: Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 23 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7: Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren $x = (1,3)^t$ und $y = (2,-4)^t$ in der Ebene aufgespannt wird.

Aufgabe 8: Überprüfe, welche der folgenden Matrizen invertierbar ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9: Berechne das charakteristische Polynom für die Matrizen in Aufgabe 8.

Aufgabe 10: Berechne die Eigenwerte der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11: Überprüfe, ob die folgenden symmetrischen Matrizen positiv definit sind:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Mehrdimensionale Differentialrechnung

Aufgabe 12: Berechne den Gradienten und die Hesse-Matrix für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$:

a. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

b. $f(x, y, z) = 3x \cdot \exp(xz) + y^3$.

c. $f(x, y, z) = x^2 y \cdot \cos(z)$.

Aufgabe 13: Berechne die Jacobi-Matrix für die folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$:

a. $f(x, y) = (x + 3y, xyz, z^2 - x)$.

b. $f(x, y) = \big(\exp(xyz), x^2 y - z^2, z\big)$.

Aufgabe 14: Für $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ als Multiplikation des Koordinatenvektors $(x_1, \ldots, x_n)^t$ mit A definiert. Berechne die Ableitung $Jf(x_1, \ldots, x_n)$. Alternativ kann man die Aufgabe für die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

lösen.

Aufgabe 15: Bestimme alle lokalen Extrema und Sattelpunkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y)^t \longmapsto x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^3 - 2xy^2 + x^2 + y^2.$$

Aufgabe 16: Bestimme alle lokalen Extrema und Sattelpunkte der folgenden Funktion

$$f : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y)^t \mapsto \frac{1}{x} - \frac{9}{y} + x - y.$$