Fachbereich Mathematik Sommersemester 2013, Blatt 7
Thomas Markwig Pablo Luka, Yue Ren

Vorkurs Mathematik

Aufgaben zu Linearen Gleichungssystemen, mehrdimensionaler Integralrechnung

1) Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 1: Berechne die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Berechne die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems, sofern es lösbar ist:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 6y & + & 2z & = & 4 \\ 2x & - & 2y & - & z & = & 2 \\ 3x & - & 4y & - & 2z & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 3: Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & & & z & = & ab \\ -2x & + & by & + & az & = & -b \\ & & by & + & (a+1)z & = & b \end{array}$$

außer $(b, 1, 0)$ noch weitere Lösungen. Bestimme sie.

Aufgabe 4: Bestimme die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$ in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & ty & + & z & = & 1 \\ tx & + & ty & + & z & = & 1+t \end{array}$$

Für Werte von t für die das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung besitzt, verifiziere diese mit Hilfe der Camerschen Regel.

Aufgabe 5: Bestimme die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}).$$

2) Mehrdimensionale Integralrechnung

Aufgabe 6: Berechne das folgende Integral:

$$\int_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \sin(x+y)\ d(x,y)$$

Aufgabe 7: Berechne das folgende Integral:

$$\int_{[0,1]\times[0,1]\times[0,1]} \frac{x^3y^2}{1+z^2}\ d(x,y,z).$$

Aufgabe 8: Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ der Normalbereich im ersten Quadranten zwischen der Geraden $y = x$ und der Parabel $y = x^2$. Berechne $\int_B xy\, d(x,y)$.

Aufgabe 9: Berechne das Volumen des Tetraeders, der von den drei Koordinatenachsen und der Ebene $z = 2 - 2x - y$ begrenzt wird.

Aufgabe 10: Berechne die Determinante der Ableitung der Zylinderkoordinatenabbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (r,\theta,z) \mapsto \big(r\cdot\cos(\theta), r\cdot\sin(\theta), z\big)$$

und zeige, daß sie auf dem Quader

$$Q = [0,\infty] \times [0,2\pi] \times \mathbb{R}$$

ohne den Rand stets positiv ist und daß φ dort eine Umkehrabbildung besitzt. Verwende dann den Transformationssatz, um das Volumen des Zylinders

$$Z = \{(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le r_0^2, 0 \le z \le z_0\}$$

zu berechnen.

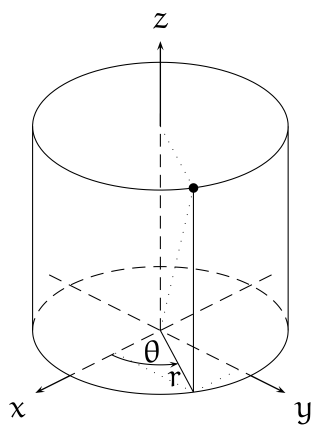

Abbildung 1: Zylinderkoordinaten