Aufgabe 8.24
Bestimme das Minimum und das Maximum der stetigen Funktion

$$f : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 1 - 2x - x^2.$$

Aufgabe 8.25
Überprüfe, ob die folgenden Funktionen f eine Umkehrfunktion besitzen und bestimme diese gegebenenfalls.

a. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + 2.$

b. $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1\} : x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+2x+1}.$

Aufgabe 8.26 (Lipschitz-Stetigkeit)
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $L \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeige, wenn $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, so ist f stetig in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 8.27 (Fixpunktsatz von Banach)
Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung mit $\mathrm{Im}(f) \subseteq [a, b]$. Zeige, daß f einen Fixpunkt hat, d.h. es gibt ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = c$.

Aufgabe 8.28
Ich fahre morgens mit dem Auto von zu Hause zur Arbeit und nachmittags fahre ich mit dem Auto auf dem gleichen Weg zurück. Wenn ich für beide Strecken exakt die gleiche Zeit benötige, gibt es dann eine Stelle auf der Strecke, die ich auf dem Hinweg und auf dem Rückweg jeweils nach derselben Zeit erreiche?

§ 9 Differenzierbarkeit und Ableitungen von Funktionen

> In diesem Abschnitt sei I stets ein offenes, halboffenes oder abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$, und $\overline{I}$ bezeichne das zugehörige abgeschlossene Intervall.

I) Differenzierbarkeit und Ableitungsregeln

Die Ableitung einer Funktion im Punkt a beschreibt die Änderung der Funktion in der Nähe von a, man sagt auch lokal in a. Dies haben wir bereits im Wachstumsmodell in Beispiel 6.1 ausgenutzt, wo $x(t)$ den Bestand der Population zum Zeitpunkt t und die Ableitung $\dot{x}(t)$ dann das Wachstum der Population zum Zeitpunkt t beschrieben hat. Weshalb dies sinnvoll ist, betrachten wir nochmals in Bemerkung 9.2. Zuvor wollen wir den Begriff der Ableitung einführen.

Definition 9.1 (Differenzierbarkeit)
Es sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ und $a \in I$. Die Funktion

$$\mathrm{Diff}_{f,a} : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

heißt der *Differenzenquotient* von f an der Stelle a.

Die Funktion f heißt *differenzierbar* in a, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x\to a} \mathtt{Diff}_{f,a}(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

existiert. In diesem Fall nennen wir diesen Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{x\to a} \mathtt{Diff}_{f,a}(x)$$

auch die *Ableitung* von f an der Stelle a.

Für die Ableitung von f in a werden auch folgende Notationen verwendet:

$$\dot{f}(a) := \frac{\partial f}{\partial x}(a) := \mathrm{D}f(a) := f'(a).$$

Wir nennen die Funktion f *differenzierbar* auf I, wenn sie in jedem Punkt von I differenzierbar ist.

Bemerkung 9.2

Für ein festes b ist der Wert des Differenzenquotienten $\mathrm{Diff}_{f,a}(b)$ die *Steigung* der *Sekante* $S_{f,a,b}$ an den Graphen von f durch die Punkte $(b, f(b))$ und $(a, f(a))$, deren Geradengleichung durch

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot x + \frac{f(a)\cdot b - f(b)\cdot a}{b-a}$$

gegeben ist (siehe Abbildung 6).

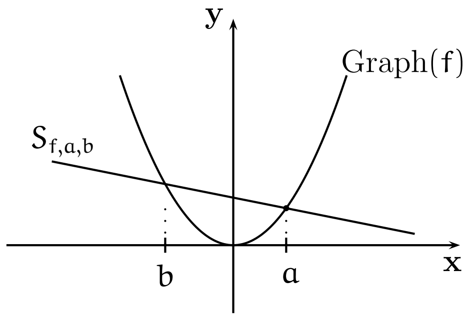

Abbildung 6. Der Differenzenquotient als Sekantensteigung

Der Definition der Ableitung liegt die Idee zugrunde, daß sich die Sekante $S_{f,a,x}$ für $x \to a$ einer Geraden annähert, die im Punkt $(a, f(a))$ den Graphen von f berührt und ihn optimal *linear approximiert*. Diese Gerade wollen wir die *Tangente* $T_{f,a}$ von f in a nennen, und der Grenzwert des Differenzenquotienten, d.h. die Steigung von $S_{f,a,x}$ konvergiert dann für $x \to a$ gegen die Steigung der Tangenten (siehe Abbildung 7). D.h. die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(a, f(a))$ hat die Geradengleichung

$$y = f'(a)\cdot x + \big(f(a) - a\cdot f'(a)\big) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a). \tag{11}$$

Die Steigung der Sekante $S_{f,a,x}$ ist ein Maß für das Wachstum der Funktionswerte von f auf dem Weg von a zu x. Liegt nun x sehr nahe an a, so ist die Steigung der

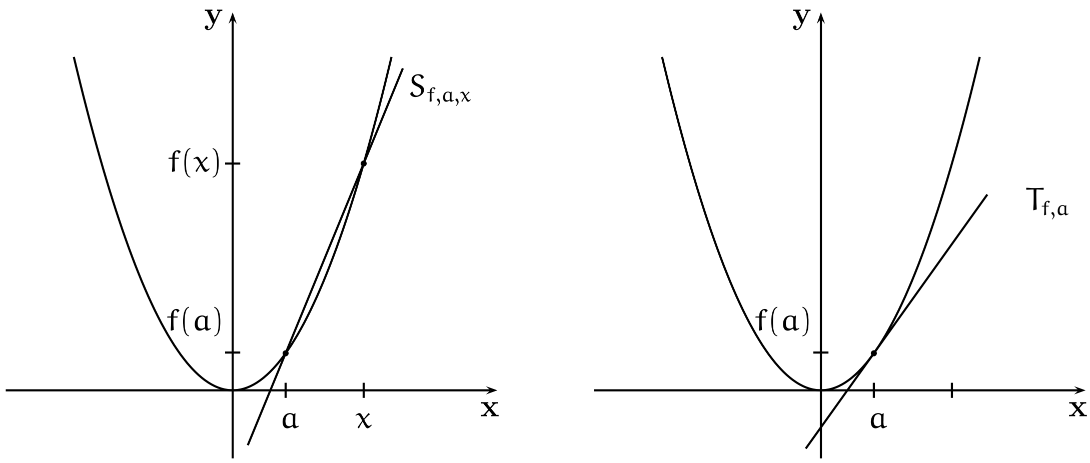

Abbildung 7. Der Differenzenquotient als Sekantensteigung

Sekante fast identisch mit der Ableitung $f'(a)$. Insofern ist die Ableitung von f in a ein gutes Maß für das Wachstum von f lokal in a.

Entsprechend ist auch die Tangente eine gute Approximation der Funktion selbst lokal in a. Da die Tangente eine lineare Funktionsgleichung hat (siehe Gleichung (11)), nennt man diese die *lineare Approximation* an f.

Beispiel 9.3
Ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^n$ mit $n \geq 1$, so ist

$$\mathrm{Diff}_{f,a}(x) = \frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + a \cdot x^{n-2} + a^2 \cdot x^{n-3} + \ldots + a^{n-2} \cdot x + a^{n-1}$$

für $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$. Für die Ableitung von f in a ergibt sich damit

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \left(x^{n-1} + a \cdot x^{n-2} + a^2 \cdot x^{n-3} + \ldots + a^{n-2} \cdot x + a^{n-1} \right) = n \cdot a^{n-1}.$$

Beispiel 9.4
Die Betragsfunktion

$$|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x|$$

ist in $a = 0$ *nicht* differenzierbar. In jedem anderen Punkt a ist sie jedoch differenzierbar mit $f'(a) = -1$ falls $a < 0$ und $f'(a) = 1$ falls $a > 0$. Anschaulich bedeutet

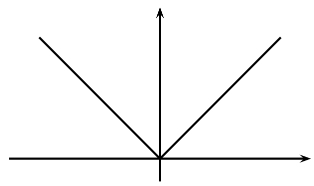

Abbildung 8. Graph der Betragsfunktion

die Nicht-Differenzierbarkeit im Punkt $a = 0$, daß man am Graphen im Ursprung keine klare Tangente findet.

Um die Nicht-Differenzierbarkeit in $a = 0$ zu sehen, betrachten wir die Nullfolge $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\geq 1}$. Die zugehörige Folge der Werte des Differenzenquotienten

$$\left(\mathrm{Diff}_{f,0}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)\right)_{n\geq 1} = \left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{n}}\right)_{n\geq 1} = \left((-1)^n\right)_{n\geq 1}$$

ist nicht konvergent. Mithin existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten in $a = 0$ nicht, und somit ist die Funktion in $a = 0$ nicht differenzierbar.

Außerdem, ist $a < 0$ und x nahe bei a, so ist auch $x < 0$ und mithin

$$\mathrm{Diff}_{f,a}(x) = \frac{|x| - |a|}{x - a} = \frac{-x + a}{x - a} = -1 \stackrel{x\to a}{\longrightarrow} -1,$$

und analog ist für $a > 0$ und x nahe bei a auch $x > 0$, so daß

$$\mathrm{Diff}_{f,a}(x) = \frac{|x| - |a|}{x - a} = \frac{x - a}{x - a} = 1 \stackrel{x\to a}{\longrightarrow} 1.$$

Damit ist auch gezeigt, daß die Ableitung in allen Punkten $a \neq 0$ existiert.

Das Beispiel zeigt, daß es stetige Funktionen gibt, die nicht differenzierbar sind. Geht das umgekehrt auch? Die Antwort gibt der folgende Satz.

Satz 9.5 (Differenzierbar impliziert stetig.)
Ist $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *differenzierbar in* a*, so ist* f *stetig in* a*.*

Im folgenden Satz geben wir für einige wichtige differenzierbare Funktionen ihre Ableitungen an.

Satz 9.6 (Wichtige Beispiele differenzierbarer Funktionen)
Die folgenden Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar.

Polynome	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$	$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot k \cdot x^{k-1}$
Wurzelfunktion	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$
Exponentialfunktion	$\exp(x) = e^x$	$\exp'(x) = \exp(x) = e^x$
Logarithmus	$\ln(x)$	$\ln'(x) = \frac{1}{x}$
Cosinus	$\cos(x)$	$\cos'(x) = \sin(x)$
Sinus	$\sin(x)$	$\sin'(x) = \cos(x)$
Tangens	$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
Arcustangens	$\arctan(x)$	$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
Arcussinus	$\arcsin(x)$	$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Die folgenden Rechenregeln sind die wichtigsten Hilfsmittel zum Bestimmen von Ableitungen.

Satz 9.7 (Rechenregeln zum Bestimmen von Ableitungen)
Seien $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *und* $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *und sei* $c \in \mathbb{R}$*.*

a. *Sind* f *und* g *differenzierbar in* $a \in I \cap J$*, dann sind auch die Funktionen* $f + g$*,* $c \cdot f$ *und* $f \cdot g$ *differenzierbar in* a*.*
b. *Sind* f *und* g *differenzierbar in* $a \in I \cap J$ *und ist zudem* $g(a) \neq 0$*, so ist auch* $\frac{f}{g}$ *differenzierbar in* a*.*
c. *Ist* g *differenzierbar in* a *und* f *differenzierbar in* $g(a)$*, so ist* $f \circ g$ *differenzierbar in* a*.*

Für die Ableitungen gilt zudem:

Summenregel	$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$
Faktorregel	$(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a).$
Produktregel	$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$
Quotientenregel	$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}.$
Kettenregel	$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$ *Merkregel: äußere Ableitung mal innere Ableitung*

Beispiel 9.8

a. Die Ableitung der Funktion
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 3 \cdot \tan(x) + x^3$$
kann mit Hilfe der Summen- und Faktorregel berechnet werden als
$$f'(x) = \frac{3}{\cos^2(x)} + 3 \cdot x^2.$$
b. Die Ableitung der Funktion
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 \cdot \sin(x)$$
kann mit der Produktregel berechnet werden als
$$f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x).$$
c. Die Funktion
$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$$
läßt sich schreiben als $f \circ g$ mit
$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + 1$$

und $f = \sqrt{\cdot}$. Also ist h differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit Ableitung

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

in x.

II) Ableitung der Umkehrfunktion

Aufgrund des Umkehrsatzes für streng monotone Funktionen 8.19 wissen wir, daß eine stetige und streng monotone Funktion auf einem Intervall eine stetige Umkehrfunktion besitzt. Dabei kann das Intervall offen, halboffen oder abgeschlossen sein und es kann auch ein uneigentliches Intervall sein. Wir wenden uns nun der Frage zu, ob die Umkehrfunktion differenzierbar ist, wenn f differenzierbar ist.

Satz 9.9 (Ableitung der Umkehrfunktion)
Es sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *sei stetig und streng monoton (wachsend oder fallend). Ist* f *differenzierbar in* a *und ist* $f'(a) \neq 0$*, so ist die Umkehrfunktion*

$$f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$$

differenzierbar in $b := f(a)$ *und es gilt*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Beispiel 9.10
Für $n \geq 2$ ist die Funktion

$$f : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty) : x \mapsto x^n$$

streng monoton wachsend und stetig nach Beispiel 8.20 mit der Wurzelfunktion als Umkehrfunktion und mit der Ableitung

$$f' : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty) : x \mapsto n \cdot x^{n-1}.$$

Da $f'(x) \neq 0$ für $x \neq 0$, folgt aus Satz 9.9, daß die Wurzelfunktion

$$\sqrt[n]{\cdot} : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty) : y \mapsto y^{\frac{1}{n}}$$

auf dem Intervall $(0, \infty)$ differenzierbar ist mit Ableitung

$$\left(\sqrt[n]{\cdot}\right)' : (0, \infty) \to \mathbb{R} : y \mapsto \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{y})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{n}-1}.$$

Im Falle von $n = 2$ erhalten wir insbesondere

$$\left(\sqrt{y}\right)' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}}.$$

III) Lokale Extrema

Eine der wichtigsten Anwendungen der Ableitung, die aus der Schule bekannt ist, ist die Bestimmung lokaler Extremstellen. Ableitungen können mithin genutzt werden, um Maximierungs- oder Minimierungsaufgaben zu lösen.

Definition 9.11 (Extremstellen)
Eine Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ hat ein *lokales Maximum* in $a \in I$, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so daß $f(a) \geq f(x)$ für alle $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap I$.

Analog definiert man den Begriff *lokales Minimum*. Lokale Minima und Maxima werden *Extremstellen* genannt.

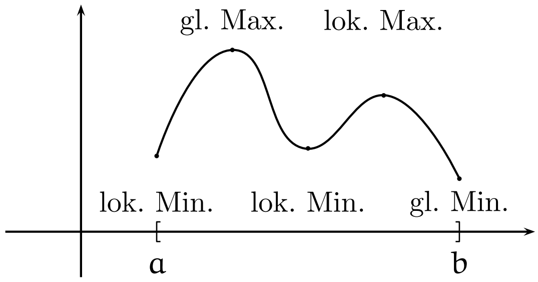

ABBILDUNG 9. Lokale Extrema

Satz 9.12 (Notwendige Bedingung für eine Extremstelle: $f'(c) = 0$)
Ist $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *in einer Extremstelle* c *differenzierbar, so ist* $f'(c) = 0$.

Satz 9.13 (Hinreichende Bedingung für eine Extremstelle)
Es sei $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine zweifach differenzierbare Funktion und* $c \in (a, b)$.

a. *Falls* $f'(c) = 0$ *und* $f''(c) < 0$, *so ist* c *ein lokales Maximum.*

b. *Falls* $f'(c) = 0$ *und* $f''(c) > 0$, *so ist* c *ein lokales Minimum.*

Bemerkung 9.14
Selbst wenn f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ definiert und dort überall differenzierbar ist, macht Satz 9.12 *keine* Aussagen über die Ableitung in den *Randpunkten* a und b, falls diese Extremstellen sind!

Die Funktion $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ nimmt in $a = -1$ ihr globales Minimum und in $a = 1$ ihr globales Maximum an, aber die Ableitungen $f'(-1) = 3 = f'(1)$ sind beide nicht Null.

Beispiel 9.15
Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - 3x^2 - 1.$$

Um mögliche Extremstellen zu finden, müssen wir die Nullstellen der ersten Ableitung

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

finden. Das ist für $x = 0$ und $x = 2$ der Fall. In diesen Punkten schauen wir uns die zweite Ableitung

$$f''(x) = 6x - 6$$

an. Aus $f''(0) = -6 < 0$ folgt, daß in $x = 0$ ein Maximum vorliegt, und aus $f''(2) = 6 > 0$ folgt, daß in $x = 2$ ein Minimum vorliegt.

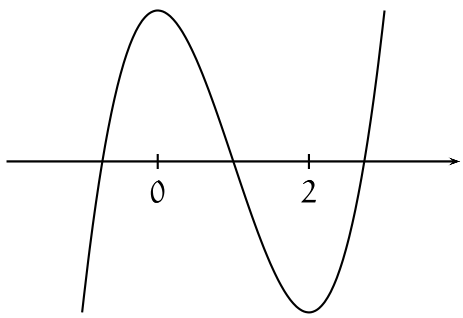

Abbildung 10. Lokale Extrema

IV) Der Mittelwertsatz

Satz 9.16 (Mittelwertsatz)
Ist $a < b$ *und ist* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig auf* $[a, b]$ *und differenzierbar auf* (a, b), *so gibt es ein* $c \in (a, b)$ *mit* $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Bemerkung 9.17
Der Mittelwertsatz besagt, daß zwischen a und b ein c liegt, in dem die Steigung der Tangente $T_{f,c}$ an den Graphen von f mit der Steigung der Sekante $s_{f,a,b}$ durch a und b übereinstimmt.

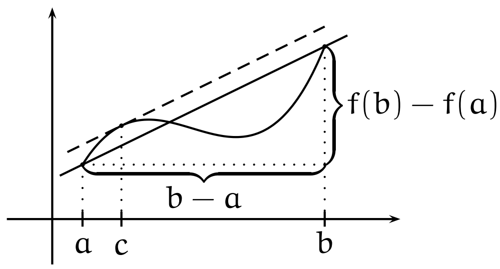

Abbildung 11. Mittelwertsatz

Beispiel 9.18
Betrachten wir die Funktion

$$f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3.$$

Aus dem Mittelwertsatz folgt, daß es ein $c \in (-1, 1)$ geben muß, so daß die Tangente an den Graphen von f im Punkt (c, c^3) die Steigung

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{2}{2} = 1$$

hat. Da wir die Ableitungsfunktion kennen, können wir versuchen, c zu bestimmen. Es muß gelten

$$1 = f'(c) = 3 \cdot c^2.$$

Wir finden also zwei solcher Stellen:

$$c = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad c = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

V) Monotonie und Ableitung

Mit Hilfe der Ableitung läßt sich bei differenzierbaren Funktionen ein hinreichendes Kriterium für Monotonie angeben.

Satz 9.19 (Hinreichendes Kriterium für Monotonie)
Es sei $a < b$ *und* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *sei stetig auf* $[a, b]$ *und differenzierbar auf* (a, b).

a. *Ist* $f'(x) > 0$ *für alle* $x \in (a, b)$, *so ist* f *streng monoton wachsend auf* $[a, b]$.

b. *Ist* $f'(x) < 0$ *für alle* $x \in (a, b)$, *so ist* f *streng monoton fallend auf* $[a, b]$.

Beispiel 9.20
Betrachte für $n \geq 1$ die Funktion

$$f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^n.$$

Für die Ableitung gilt

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1} > 0$$

für alle $x \in (0, \infty)$. Mithin ist die Funktion streng monoton wachsend auf jedem Intervall $[0, b] \subseteq [0, \infty)$ und mithin auf $[0, \infty)$. Dies ist ein alternativer Beweis der Aussage in Beispiel 8.20.

VI) Die Regeln von de l'Hôpital

Im folgenden Satz soll $[-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ bezeichnen.

Satz 9.21 (Regeln von de l'Hôpital)
Seien $a, b \in [-\infty, \infty]$ *mit* $a < b$, $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *differenzierbar und* $c \in [a, b]$. *Ferner gelte* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in (a, b)$ *und* $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existiere eigentlich oder uneigentlich.*

a. *Falls* $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$, *so gilt* $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

b. *Falls* $\lim_{x \to c} g(x) \in \{\infty, -\infty\}$, *so gilt* $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Beispiel 9.22
Wir betrachten die Funktionen $f = \sin$ und $g = \sqrt{\cdot}$ auf dem Intervall $(0, \infty)$. Dort sind beide differenzierbar mit

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$$

und

$$g'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \neq 0$$

für alle $x \in (0, \infty)$. Aus der ersten Regel von de l'Hôpital 9.21 folgt dann

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \cos(x) \cdot 2 \cdot \sqrt{x} = \cos(0) \cdot 2 \cdot \sqrt{0} = 0.$$

VII) Das Newton Verfahren

Bemerkung 9.23 (Newton Verfahren)
Nullstellen von Funktionen kann man in aller Regel nicht exakt bestimmen. Deshalb ist man an guten Verfahren zur Bestimmung eines Näherungswertes für Nullstellen interessiert. Ein solches Verfahren ist das Newton Verfahren.

Die Grundidee ist hierbei, einen Startpunkt a_1 in der Nähe einer Nullstelle zu wählen und die Funktion f durch ihre Tangente

$$y = f(a_1) + f'(a_1) \cdot (x - a_1)$$

in a zu ersetzen. Dies ist eine lineare Funktion, so daß wir ihre Nullstelle a_2 ausrechnen können,

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}.$$

Wir hoffen, daß a_2 näher an der Nullstelle liegt, als a_1.

Dann verfahren wir mit a_2 genau wie zuvor mit a_1, bestimmen einen neuen Näherungswert a_3 für die Nullstelle und fahren dann so fort. Auf dem Weg berechnet man eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, von der man unter hinreichend guten Voraussetzungen zeigen kann, daß sie gegen eine Nullstelle von f konvergiert. Den Fehler, den man dabei im Schritt n macht, kann man zudem abschätzen, so daß man bei vorgegebener Fehlertoleranz weiß, wann man mit dem Verfahren aufhören kann.

Aufgabe 9.24
Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

a. $f(x) = \cos^2(x) \cdot \sin^2(x)$.

b. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

c. $f(x) = (x^3 + x)^6$.

d. $f(x) = \cos(\sin(x))$.

Aufgabe 9.25
Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen $f : (a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.

a. $f(x) = x \cdot \ln(x)$ mit $a = 0$.

b. $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ mit $a = 0$.

c. $f(x) = \ln\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$ mit $a = 1$.

d. $f(x) = \frac{x^2+4}{x-4}$ mit $a = 4$.

e. $f(x) = \sqrt{e^{\cos(\sqrt{x})}}$ mit $a = 0$.

Aufgabe 9.26

Berechne die Ableitungen des Cosinus Hyperbolicus

$$\cosh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

und des Sinus Hyperbolicus

$$\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Aufgabe 9.27

Eine Funktion, deren Abbildungsvorschrift

$$f : (-r, r) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$$

durch eine Reihe gegeben ist, ist differenzierbar und für die Ableitung gilt[12]

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot x^{k-1}.$$

Verwende diese Tatsache und die Reihendarstellung der Exponentialfunktion, des Sinus und des Cosinus in Satz 7.20, um die Ableitungsregeln für diese Funktionen zu verifizieren.

Aufgabe 9.28

Verifiziere die Ableitungsregeln für den Logarithmus, den Arcustangens und den Arcussinus mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion 9.9.

Aufgabe 9.29

Begründe, daß eine Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ konstant sein muß, wenn sie auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$ ist.

---

[12] Man beachte, daß bei der Bildung der Ableitung zwei Grenzwertprozesse vertauschen! Denn die Abbildungsvorschrift von f ist

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

wenn wir

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$$

setzen. Damit gilt dann wegen

$$\lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \overset{!}{=} \lim_{n\to\infty} f_n'(a) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} \frac{f_n(x) - f_n(a)}{x - a}$$

wegen

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot k \cdot x^{k-1}.$$