KAPITEL II

Analysis

§ 6 Motivation

Die Mathematik ist ein wichtiges Hilfsmittel in den Natur-, Ingenieurs- und Wirtschaftswissenschaften, um Phänomene der realen Welt zu beschreiben. Eine solche Beschreibung kann immer nur eine Approximation an die Realität sein, aber oft sind die Näherungen sehr gut. Den Weg von einem realen Phänomen zu einer mathematischen Beschreibung nennt man *Modellbildung*, und man spricht dann auch von dem zugehörigen *mathematischen Modell.* Ein gutes Modell aufzustellen, ist in aller Regel eine sehr komplexe Angelegenheit, die das gründliche Sammeln und Analysieren großer Datenmengen sowie eine gehörige Portion Erfahrung und Intuition benötigt. Außerdem wird man das Modell immer wieder auf seine Tauglichkeit überprüfen und ggf. Nachbesserungen vornehmen müssen. Dabei ist zudem zu beachten, daß das Modell nicht zu einfach ist, damit es die Realität adäquat beschreiben kann, und daß es auch nicht zu kompliziert ist, weil man sonst nicht mehr damit rechnen kann. Die beiden Forderungen sind offenbar gegenläufig.

Beispiel 6.1 (Ein naives Wachstumsmodell)
Wir wollen die Vorgehensweise an einem sehr vereinfachten Beispiel darstellen. Will man *Wachstumsprozesse* beschreiben, so gilt zunächst die einfache Regel:

Je mehr schon da ist, desto mehr kommt noch dazu.

Etwas mathematischer könnte man das Ausdrücken als:

Das Wachstum ist proportional zum Bestand.

Beschreibt der Funktionswert $x(t)$ den Bestand einer Population zum Zeitpunkt t, so wird das Wachstum, d.h. die Veränderung der Population, zum Zeitpunkt t durch die Ableitung $\dot{x}(t)$ beschrieben. Daß das Wachstum proportional zum Bestand ist, bedeutet dann, daß die Funktion x die folgende Gleichung erfüllt:

$$\dot{x}(t) = c \cdot x(t), \tag{7}$$

wobei die Konstante $c \in \mathbb{R}$ der Proportionalitätsfaktor ist, der beschreibt, wie stark das Wachstum ist. Damit haben wir unser naives Modell für die Beschreibung des Wachstums einer Population gebildet, die viele Faktoren (wie z.B. Sterblichkeit) außer acht läßt. Für konkrete Anwendungen bliebe noch der Proportionalitätsfaktor c zu ermitteln, indem Daten über das Wachstum der Population erhoben werden.

Danach ist das Modell fertig und wir stehen vor der Aufgabe, die Funktion x zu bestimmen.

Mit ziemlicher Sicherheit ist das Wachstumsmodell bereits aus der Schule bekannt, da es oft verwendet wird, um die Exponentialfunktion zu motivieren, die im wesentlichen die einzige Lösung für das obige Problem ist. Die Funktion

$$x(t) = a \cdot e^{c \cdot t}$$

erfüllt die Gleichung (7), wobei $a \in \mathbb{R}$ irgendeine Konstante ist. Wenn man den Populationsbestand zum Zeitpunkt $t = 0$ kennt, so kann man a bestimmen. Wir haben also nicht nur das Wachstumsmodell aufgestellt, wir waren auch in der Lage, es vollständig zu lösen.

Da das so schön einfach ging, schauen wir uns noch ein etwas komplizierteres physikalisches Beispiel an, bei dem auch die komplexen Zahlen ins Spiel kommen.

Beispiel 6.2
Der Funktionswert $x(t)$ soll die Auslenkung einer an einer Feder befestigten Masse m zum Zeitpunkt t beschreiben. Dann beschreibt die zweite Ableitung $\ddot{x}(t)$ die Beschleunigung der Masse zum Zeitpunkt t und die Physik lehrt uns, daß die Trägheitskraft zum Zeitpunkt t dann durch

$$\text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung} = m \cdot \ddot{x}(t)$$

gegeben ist. Diese ist aber identisch mit der Rückstellkraft $-k \cdot x(t)$ der Feder, wobei k die sogenannte Federkonstante ist. Es gilt also die Gleichung

$$m \cdot \ddot{x}(t) = -k \cdot x(t),$$

die somit das mathematische Modell für die Beschreibung der Auslenkung einer an einer Feder befestigten Masse m ist.

Um das Modell zu lösen, betrachten wir der Einfachheit halber nur den Fall $m = 1$ und $k = 1$, so daß die Gleichung

$$\ddot{x}(t) = -x(t)$$

zu lösen ist. Wir suchen also eine Funktion x, so daß die zweite Ableitung gerade das Negative der Funktion x ist, und sehen damit unmittelbar als mögliche Lösung die Funktion

$$x(t) = e^{i \cdot t},$$

da dann

$$\dot{x}(t) = i \cdot e^{i \cdot t}$$

und somit

$$\ddot{x}(t) = i^2 \cdot x(t) = -x(t)$$

gilt. Die Lösung ist auf den ersten Blick wenig befriedigend, aber wenn wir uns an die bereits in Bemerkung 4.12 postulierte Gleichung

$$e^{it} = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$$

erinnern, sehen wir, daß auch cos und sin Lösungen der Gleichung sein müssen. Das verwundert wahrscheinlich niemanden sonderlich.

Motivation 6.3

Ich möchte die obigen Beispiele zum Anlaß nehmen, die verschiedenen Elemente der Analysis zu motivieren, die wir im folgenden einführen. Schauen wir uns noch einmal kurz die Gleichung

$$\dot{x}(t) = c \cdot x(t)$$

an. In der Gleichung kommt die *Ableitung* der Funktion x an der Stelle t vor. Was ist das?

In der Schule lernt man die Ableitung einer Funktion an der Stelle t als die *Steigung* der *Tangente* an den Graphen der Funktion an der Stelle t kennen (siehe Abbildung 1). Was aber bitteschön ist die Tangente?

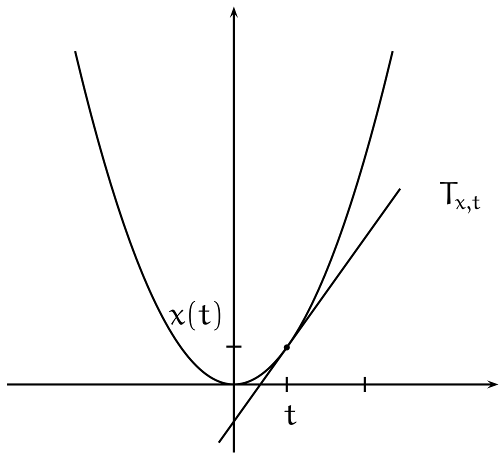

ABBILDUNG 1. Die Tangente $T_{x,t}$ an den Graphen von x im Punkt $(t, x(t))$

Die Tangente an den Graphen von x im Punkt $(t, x(t))$ ist *die* Gerade, die den Graphen der Funktion x im Punkt $(t, x(t))$ *berührt* — aber das ist eine Tautologie, die uns nicht im geringsten weiter hilft, denn was heißt es schon, daß eine Gerade einen Graphen berührt? Will man die Tangente sauber definieren, schaut man sich stattdessen Sekanten an (siehe Abbildung 2), da diese leicht zu definieren sind. Die Sekante $S_{x,t,s}$ von x durch die Punkte $(t, x(t))$ und $(s, x(s))$ hat die Steigung

$$\frac{x(s) - x(t)}{s - t},$$

und mit Hilfe der Information, daß sie durch den Punkt $(t, x(t))$ geht, kann man die Geradengleichung dann genau bestimmen, was wir hier aber nicht tun wollen. Die Idee ist nun, daß die Sekante $S_{x,t,s}$ sich der Tangente $T_{x,t}$ annähert, wenn wir

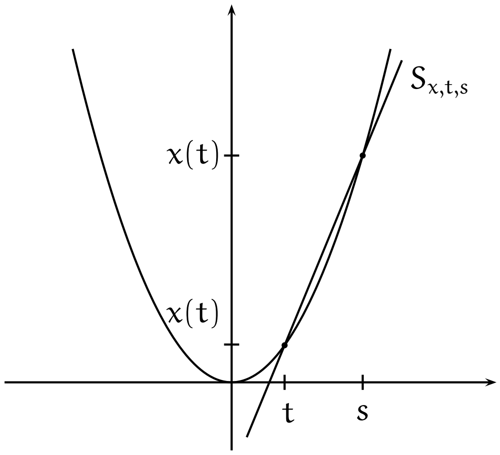

Abbildung 2. Die Sekante $S_{x,t,s}$ durch die Punkte $(t, x(t))$ und $(s, x(s))$

s sehr nahe an t schieben. Man sagt auch, daß die *Sekantensteigung* gegen die *Tangentensteigung konvergiert*, wenn s gegen t konvergiert. Was genau sollen wir darunter verstehen? Was heißt *annähern* oder *konvergieren*?

Intuitiv haben wir wahrscheinlich eine Vorstellung davon, was gemeint ist. Die Begriffe aber sauber zu fassen, so daß sie das widerspiegeln, was man meint, und daß man zugleich mit ihnen arbeiten kann, war eine der größten Herausforderungen der Analysis. Sie gemeistert zu haben, ist vor allem ein Verdienst von Newton und Leibniz, auf deren Schultern spätere Generationen die Technik weiterentwickelt und verfeinert haben bis hin zu der Form, in der sie heute unterrichtet wird. Wenn die Mathematik so lange dazu gebraucht hat, um die Begriffe und Techniken zu entwickeln, sollte es niemanden allzusehr bedrücken, falls er eine Weile braucht, um mit ihnen vertraut zu werden. Ich hoffe, daß die folgenden Überlegungen dabei hilfreich sein werden.

Es gibt zwei grundlegende Möglichkeiten, den *Konvergenzbegriff*, man sagt auch den *Grenzwertbegriff*, einzuführen — *kontinuierlich* oder *diskret*. Ich werde mich in der vorliegenden Ausarbeitung auf den diskreten Weg konzentrieren, da ich ihn für leichter zugänglich halte. Wenn wir uns einer Sache nähern, tun wir das gerne *schrittweise*, und genau das meine ich mit dem Begriff *diskret*. Allerdings werden dabei unendlich viele Schritte nötig sein, und es ist vollkommen in Ordnung, daß wir unser Ziel nie erreichen, sondern immer nur näher ran kommen. Dabei führt uns jeder Schritt von einer reellen Zahl zu einer neuen.

Unsere Schritte zählen wir ab, beginnend mit 1. Wenn wir unendlich viele Schritte brauchen, heißt das, daß wir zum Zählen der Schritte alle natürlichen Zahlen benötigen. Wenn wir die reelle Zahl, die wir im n-ten Schritt erreichen, mit s_n bezeichnen, so erhalten wir eine sogenannte *Folge* reeller Zahlen,

$$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, \ldots$$

oder in Kurzform

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

In unserem Tangenten-/Sekantenbeispiel oben wollen wir zunächst, daß s gegen t konvergiert, d.h. wir wollen uns der Zahl t schrittweise annähern. Wir brauchen also zunächst eine Zahlenfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die sich t nähert. Zu jedem s_n gehört dann eine Sekantensteigung

$$S_n := \frac{x(s_n) - x(t)}{s_n - t},$$

so daß wir eine zweite Zahlenfolge

$$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

erhalten. Unser Ziel ist es, zu verstehen, welcher Zahl T sich die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nähert, wenn sich $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Zahl t nähert. T ist dann unser Kandidat für die Tangentensteigung. Wenn es uns gelungen ist, T auszurechnen, sind wir aber leider noch nicht fertig. Denn es gibt ja sehr viele Möglichkeiten, sich t schrittweise zu näheren, und wir müssen uns fragen, ob sich jeweils die Folge der zugehörigen Sekantensteigungen auch der gleichen Zahl T nähert, da wir nur eine Zahl als Tangentensteigung brauchen können. Diese sollte nicht davon abhängen, wie genau ich mich der Zahl t genähert habe.

Was sollen uns die letzten Ausführungen sagen?

Wenn wir Begriffe wie die Ableitung einer Funktion verstehen wollen, müssen wir sehr viele Zahlenfolgen auf ihr Konvergenzverhalten hin untersuchen. Wir sollten in der Analysis deshalb mit der Einführung und Untersuchung des Konvergenzbegriffs reeller Zahlenfolgen beginnen.

§ 7 Folgen

> Wir wollen in diesem Abschnitt Folgen reeller und komplexer Zahlen betrachten. Deshalb stehe im folgenden $\mathbb{K}$ wahlweise für den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen oder für den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

Definition 7.1 (Folgen)
Eine *Folge* in $\mathbb{K}$ ist eine Familie

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$$

von Zahlen in $\mathbb{K}$.[1]

[1] Eine *Familie* von Zahlen in $\mathbb{K}$ definiert man formal als Abbildung (siehe Anhang C)

$$\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$$

von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{K}$. Sie ist eindeutig festgelegt durch ihre Funktionswerte $a_n := \alpha(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die Schreibweise $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für die Abbildung gerechtfertigt.

Manchmal ist es angenehmer, eine Folge nicht bei 1 starten zu lassen, sondern bei einer anderen ganzen Zahl k. Dann schreiben wir für die Folge schlicht $(a_n)_{n\geq k}$.

Beispiel 7.2

a. Die einfachsten Folgen sind die *konstanten Folgen*, bei denen jedes Folgenglied den gleichen festen Wert $c \in \mathbb{K}$ hat: $(c)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Für $x \in \mathbb{K}$ nennen wir $(x^n)_{n\geq 0}$ *geometrische Folge.*

c. Weitere Beispiele für Folgen in $\mathbb{R}$:

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \left(\frac{1}{4n^2-36n+81}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Bemerkung 7.3 (Konvergenz von Zahlenfolgen)

Was müssen wir von einer Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fordern, um mit Fug und Recht sagen zu können, daß sie sich einer Zahl a nähert, also gegen a konvergiert?

Es scheint recht natürlich, zu fordern, daß der Abstand zu a mit jedem Schritt kleiner wird. Außerdem sollte man sicher fordern, daß der Abstand zu a im Laufe der Zeit beliebig klein wird, d.h. *wenn man nur genügend viele Schritte macht, so soll auch der Abstand jede vorgegebene Schranke unterschreiten.*

In der Tat reicht uns die zweite Forderung vollkommen aus. Wir wollen zulassen, daß wir zwischendurch auch mal einige Schritte machen, die uns von a noch mal ein Stück weit wegführen, solange sie uns langfristig nicht zu weit von a wegbringen.[2]

Übersetzen wir nun die kursiv gedruckte Bedingung in der Sprache der Mathematik, so daß sie leichter überprüfbar wird, und wir nicht mehr so vage argumentieren müssen, wie in der letzten Fußnote.

Der Abstand soll *jede Schranke* unterschreiten. Wir müssen also eine beliebige Schranke betrachten. Es hat sich eingebürgert, diese Schranken mit ε zu bezeichnen, und da sie Abstände messen sollen, müssen sie notwendig positiv sein. Wir müssen also für *jedes* $\varepsilon > 0$ etwas überprüfen.

---

[2] Schauen wir uns die ersten Glieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{4n^2-36n+81}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in Beispiel 7.2 an:

$$a_1 = \frac{1}{49}, \quad a_2 = \frac{1}{25}, \quad a_3 = \frac{1}{9}, \quad a_4 = 1.$$

Die Werte werden immer größer, entfernen sich also immer weiter von der Zahl 0. Rechnen wir weitere Folgenglieder aus,

$$a_5 = 1, \quad a = 6 = \frac{1}{9}, \quad a_7 = \frac{1}{25}, \quad a_8 = \frac{1}{49}, \quad a_9 = \frac{1}{81}, \quad a_{10} = \frac{1}{121}, \quad a_{11} = \frac{1}{169},$$

so stellen wir fest, daß diese immer näher bei der Zahl 0 liegen. Eine kurze Überlegung überzeugt uns davon, daß für sehr große Zahlen n in dem Term $4n^2 - 36n + 81$ der Summand $4n^2$ erheblich größer sein wird als die beiden anderen Summanden, daß mithin der Nenner sehr sehr groß wird und der Bruch damit sehr sehr nahe an die Zahl 0 kommen muß. Die Folge steigt also zunächst an, nähert sich langfristig aber der Zahl 0. Wir wollen sicher zulassen, daß eine solche Folge als gegen 0 konvergent angesehen wird.

Zu überprüfen ist, daß der Abstand zu a kleiner als ε wird, wenn wir nur genügend viele Schritte machen, d.h. daß der Abstand der Folgenglieder a_n zu a kleiner als die Schranke ε wird, wenn n nur hinreichend groß ist. Das bedeutet, ab einem hinreichend großen n muß stets $|a_n - a| < \varepsilon$ gelten; und *ab einem hinreichend großen* n, heißt, daß *es eine feste Zahl* N_ε *geben muß*, so daß die Bedingung *für alle* $n \geq N_\varepsilon$ gelten muß. Der Index ε an N_ε drückt dabei aus, daß diese hinreichend große Zahl, ab der der Abstand von a_n und a kleiner als ε wird, von der Schranke ε abhängt, und daß bei verschiedenen Schranken ε auch verschiedene N_ε's rauskommen.

Diese Überlegungen formulieren wir in der folgenden Definition in kompakter Form.

Definition 7.4 (Konvergenz und Grenzwert)
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $a \in \mathbb{K}$.

> Wir nennen a einen *Grenzwert* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$.

In diesem Fall sagen wir auch, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* a *konvergiert* und schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

oder

$$a_n \longrightarrow a.$$

Wir nennen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent*, wenn es ein $a \in \mathbb{K}$ gibt, so daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. Andernfalls nennen wir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *divergent*.

Wir nennen eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ eine *Nullfolge*, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert, d.h. $a_n \longrightarrow 0$.

Beispiel 7.5

a. Die konstante Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen c, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$. Um das zu sehen, wählen wir für eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ die natürliche Zahl $N_\varepsilon = 1$, so daß für jedes $n \geq N_\varepsilon = 1$ gilt

$$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

b. Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen 0, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Denn: sei $\varepsilon > 0$ gegeben, so gibt es eine natürliche Zahl N_ε, so daß $0 < \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$. Ist nun $n \geq N_\varepsilon$, so folgt

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

c. Für $|x| < 1$ kann man mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung und eines geschickten Ansatzes (siehe Fußnote 3) zeigen, daß die geometrische Folge $(x^n)_{n\geq 0}$ eine Nullfolge ist.[3]

[3] Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß $x \neq 0$, da die Folge sonst sicher eine Nullfolge ist.

Bemerkung 7.6
Wie zeigt man, daß eine Zahl a *nicht* Grenzwert einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist?

Dazu muß man die Bedingung in Definition 7.4 negieren. In Anhang A wird erklärt, wie man eine längere Aussage mit Quantoren negiert. Unter anderem werden dabei die Quantoren *es existiert* und *für alle* ausgetauscht. Wir erhalten dabei:

> a ist kein *Grenzwert* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß für alle $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N_\varepsilon$ existiert, so daß $|a_n - a| \geq \varepsilon$.

Als Beispiel wollen wir zeigen, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent ist, daß sie also keinen Grenzwert besitzt.

Sei also $a \in \mathbb{R}$ unser Kandidat für den Grenzwert. Wir müssen also ein $\varepsilon > 0$ finden, so daß obige Bedingung erfüllt ist. Ich halte $\varepsilon = \frac{1}{2}$ für einen guten Kandidaten. Betrachten wir nun ein beliebiges $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so gilt wegen der Dreiecksungleichung

$$2 = |(-1)^{N_\varepsilon} - (-1)^{N_\varepsilon+1}| = |a_{N_\varepsilon} - a_{N_\varepsilon+1}| \leq |a_{N_\varepsilon} - a| + |a - a_{N_\varepsilon+1}|.$$

Also können nicht beide Summanden $|a_{N_\varepsilon} - a|$ und $|a_{N_\varepsilon+1} - a|$ kleiner als $\varepsilon = \frac{1}{2}$ sein. Ist der erste der beiden Ausdrücke größer, wählen wir $n = N_\varepsilon$ in der obigen Bedingung, sonst wählen wir $n = N_\varepsilon + 1$. In jedem Fall haben wir gezeigt, daß die Zahl a nicht Grenzwert der Folge sein kann.

Bemerkung 7.7
Ist eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ konvergent, so ist ihr Grenzwert *eindeutig* bestimmt.

Alles andere würde unserer Absicht bei der Bildung des Begriffes widersprechen, aber das heißt ja noch nicht, daß unsere Definition das auch hergibt. Dazu bedarf es eines formalen Beweises (siehe Fußnote 4).[4]

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir betrachten die reelle Zahl

$$y := \frac{1}{|x|} - 1 > 0,$$

die positiv ist, da nach Voraussetzung $0 < |x| < 1$. Wenn wir $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ hinreichend groß wählen, so gilt

$$\frac{1}{N_\varepsilon.} < y \cdot \varepsilon \tag{8}$$

Ist nun $n \geq N_\varepsilon$, so gilt wegen $|x| = \frac{1}{1+y}$ und der Bernoullischen Ungleichung auch

$$|x^n - 0| = |x|^n = \frac{1}{(1+y)^n} \overset{3.11}{\leq} \frac{1}{1+n\cdot y} < \frac{1}{n\cdot y} \leq \frac{1}{N_\varepsilon \cdot y} \overset{(8)}{<} \frac{y\cdot\varepsilon}{y} = \varepsilon.$$

[4] Nehmen wir an, eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ besitze zwei verschiedene Grenzwerte $a, b \in \mathbb{K}$. Dann ist die reelle Zahl

$$\varepsilon := \frac{|a-b|}{2} > 0$$

positiv. Mithin gibt es zwei natürliche Zahlen $N_\varepsilon, N'_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so daß

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

Die folgenden Grenzwertsätze und der Einschachtelungssatz helfen dabei, aus konvergenten Folgen neue konvergente Folgen zu basteln, oder alternativ, die Konvergenz von neuen Folgen auf die Konvergenz bekannter Folgen zurück zu führen.

Satz 7.8 (Grenzwertsätze)
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergente Folgen in* $\mathbb{K}$ *mit* $a_n \longrightarrow a$ *und* $b_n \longrightarrow b$.

a. $a_n + b_n \longrightarrow a + b$ *und* $a_n - b_n \longrightarrow a - b$.

b. $a_n \cdot b_n \longrightarrow a \cdot b$.

c. $|a_n| \longrightarrow |a|$.

d. *Ist zudem* $b \neq 0$, *so gibt es ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *mit* $b_n \neq 0$ *für alle* $n \geq n_0$ *und die Folge* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq n_0}$ *ist konvergent mit*
$$\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b}.$$

Satz 7.9 (Einschachtelungssatz)
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folgen in* $\mathbb{R}$ *mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$, *und sei* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{R}$ *mit* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *für alle* $n \geq n_0$, *so gilt auch*
$$\lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

Beispiel 7.10

a. Aus den Grenzwertsätzen erhalten wir unmittelbar:
$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \cdot 0 = 0.$$

b. Aus dem Einschachtelungssatz erhalten wir wegen $n^2 + n + 1 > n^2$ und
$$0 \longleftarrow 0 \leq \frac{1}{n^2+n+1} \leq \frac{1}{n^2} \longrightarrow 0,$$
daß auch
$$\frac{1}{n^2+n+1} \longrightarrow 0.$$

c. Wir wollen die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$a_n = \frac{3n^2+1}{4n^2+4n+4}$$
auf ihr Konvergenzverhalten hin untersuchen. Dazu schreiben wir sie wie folgt um:
$$a_n = \frac{3n^2+1}{4n^2+4n+4} = \frac{3n^2}{4n^2+4n+4} + \frac{1}{4n^2+4n+4}.$$
Es reicht wegen der Grenzwertsätze, die Grenzwerte der Summanden zu bestimmen.

---

für $n \geq N_\varepsilon$ und
$$|a_n - b| < \varepsilon$$
für $n \geq N'_\varepsilon$. Setzen wir nun $N := \max\{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\}$, so gilt
$$|a - b| \leq |a - a_N| + |a_N - b| < \varepsilon + \varepsilon = |a - b|,$$
was ein offensichtlicher Widerspruch ist.

Aus Teil b. und mit den Grenzwertsätzen wissen wir, daß

$$\frac{1}{4n^2+4n+4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^2+n+1} \longrightarrow \frac{1}{4} \cdot 0 = 0.$$

Den ersten Summanden schreiben wir um, indem wir Zähler und Nenner durch n^2 dividieren und dann die Grenzwertsätze anwenden:

$$\frac{3n^2}{4n^2+4n+4} = \frac{3}{4+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}} \longrightarrow \frac{3}{4+0+0} = \frac{3}{4}.$$

Wir erhalten also insgesamt

$$a_n = \frac{3n^2}{4n^2+4n+4} + \frac{1}{4n^2+4n+4} \longrightarrow \frac{3}{4} + 0 = \frac{3}{4}.$$

d. Daß in Teil c. der Wert $\frac{3}{4}$ als Grenzwert herauskommt, ist kein Wunder. Man kann allgemein für eine Folge der Form

$$a_n = \frac{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \ldots + b_1 n + b_0}{c_l n^l + c_{l-1} n^{l-1} + \ldots + c_1 n + c_0}$$

mit $b_k \neq 0 \neq c_l$ zeigen, daß

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0, & \text{wenn } k < l, \\ \frac{b_k}{c_l}, & \text{wenn } k = l, \\ \infty, & \text{wenn } k > l \text{ und } \frac{b_k}{c_l} > 0, \\ -\infty, & \text{wenn } k > l \text{ und } \frac{b_k}{c_l} < 0. \end{cases}$$

Damit diese Aussage sinnvoll ist, müssen wir noch erklären, was es bedeutet, daß der "*Grenzwert*" einer Folge ∞ oder $-\infty$ sein soll (siehe Definition 7.11). Das ist mit der Definition 7.4 noch nicht abgedeckt, da ∞ und $-\infty$ keine reellen Zahlen sind!

Definition 7.11 (Bestimmte Divergenz)
Wir sagen, daß eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen *bestimmt divergiert gegen* ∞, falls für jede positive Schranke $s > 0$ ein $n_s \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $a_n > s$ für alle $n \geq n_s$.[5] In diesem Fall schreiben wir $a_n \longrightarrow \infty$ oder $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, und nennen ∞ auch den uneigentlichen *Grenzwert* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bestimmte Divergenz gegen $-\infty$ definiert man analog.

Beispiel 7.12
Die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent mit Grenzwert ∞, die Folge $\big((-1)^n \cdot n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent, aber nicht bestimmt divergent.

Bemerkung 7.13 (Grenzwertsätze für uneigentliche Grenzwerte)
Wir einigen uns für $a \in \mathbb{R}$ auf die folgenden Rechenregeln:

- $a + \infty := \infty$ und $a - \infty := -\infty$.

[5]Die Definition für bestimmte Divergenz gegen ∞ besagt also, daß für jede noch so große Schranke s alle Folgenglieder ab einer geeigneten Stelle n_s oberhalb dieser Schranke liegen. In diesem Sinne nähert sich die Folge als dem Wert ∞ an. Von Konvergenz möchte man in der Situation dennoch nicht sprechen.

- $a \cdot \infty := \infty$, $a \cdot -\infty := -\infty$ und $\frac{a}{0} := \infty$, falls $a > 0$.
- $a \cdot \infty := -\infty$, $a \cdot -\infty := \infty$ und $\frac{a}{0} := -\infty$, falls $a < 0$.
- $\frac{a}{\infty} := 0$ und $\frac{a}{-\infty} := 0$.
- $\frac{\infty}{0} := \infty$ und $\frac{-\infty}{0} := -\infty$.

Damit lassen sich die Grenzwertsätze für Folgen 7.8 verallgemeinern auf Fälle unter Einbeziehung von bestimmt divergenten Folgen. Wann immer man bei der Anwendung der Grenzwertsätze als Grenzwert einen der obigen Ausdrücke erhält, kann man den Grenzwert auf dem Weg berechnen. Z.B. gilt:

- Wenn $a_n \longrightarrow a > 0$ und $b_n \longrightarrow 0$ mit $b_n > 0$, so gilt $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{0} = \infty$.

Satz 7.14 (Einige interessante Folgen und ihre Grenzwerte)

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ *für alle* $x \in \mathbb{C}$, *d.h. die Fakultät wächst schneller als jede Potenz.*

b. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{x^n} = 0$ *für* $|x| > 1$ *und* $k \in \mathbb{N}$, *d.h. Potenzen steigen stärker als Polynome.*

c. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$ *für alle* $x \in (0, \infty)$.

d. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

e. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

Beweis: Wir zeigen nur Teil a. und beachten für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dazu, daß $a_n \longrightarrow a$ genau dann gilt, wenn $|a_n - a| \longrightarrow 0$ gilt.

Wenn wir $N \in \mathbb{N}$ hinreichend groß wählen, so gilt

$$\frac{|x|}{N} \leq \frac{1}{2}.$$

Für $n \geq N$ gilt dann

$$0 \leq \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|}{n} \cdot \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} \leq \ldots \leq \frac{1}{2^{n-N}} \cdot \frac{|x|^N}{N!} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|2x|^N}{N!}.$$

Als geometrische Folge ist $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so daß mit dem Einschachtelungssatz auch

$$\left|\frac{x}{n!} - 0\right| = \frac{|x|^n}{n!} \longrightarrow 0$$

gilt, was zu zeigen war. □

Bemerkung 7.15

Bisher konnten wir die Konvergenz von Folgen nur zeigen, wenn wir den Grenzwert auch kannten. Interessanterweise gibt es aber auch Kriterien, die es uns erlauben, die Konvergenz einer Folge zu zeigen, ohne den Grenzwert kennen zu müssen!

Das erste Kriterium dieser Art ist das Cauchy-Kriterium. Es besagt im wesentlichen, daß eine Folge konvergent sein muß, wenn die Folgenglieder immer näher beieinander liegen. Etwas mehr in der Sprache der Mathematik ausgedrückt heißt das, für jede noch so kleine positive Schranke soll der Abstand zweier Folgenglieder a_n und a_m kleiner ε sein, wenn n und m nur hinreichend groß sind (siehe Satz 7.16).

Ein weiteres solches Kriterium ist das Monotoniekriterium in Aufgabe 7.28.

Satz 7.16 (Cauchy-Kriterium)
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{K}$ *ist genau dann konvergent, wenn für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *existiert, so daß* $|a_n - a_m| < \varepsilon$ *für alle* $n > m \geq N_\varepsilon$.

Bemerkung 7.17
Wir werden das Cauchy-Kriterium nicht anwenden, um die Konvergenz von Folgen zu zeigen. Aber wir wollen darauf hinweisen, daß seine Gültigkeit eine Eigenschaft ist, die die reellen Zahlen gegenüber den rationalen Zahlen in gleicher Weise auszeichnet wie das Supremumsaxiom 2.11.

Betrachten wir die Dezimalzahldarstellung der irrationalen Zahl $\sqrt{2}$ und definieren a_n dadurch, daß wir die Dezimalzahldarstellung von $\sqrt{2}$ nach den ersten n Nachkommastellen abschneiden, so sind die a_n allesamt rationale Zahlen und die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert offenbar gegen $\sqrt{2}$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine Folge rationaler Zahlen, die das Cauchy-Kriterium erfüllt. In $\mathbb{Q}$ konvergiert sie aber nicht, denn ihr Grenzwert $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Bemerkung 7.18 (Supremum und Infimum sind Grenzwerte von Folgen.)
Es sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht-leere Menge reeller Zahlen.

a. Ist A nach oben beschränkt, so gibt es eine monoton wachsende[6] Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A, die gegen $\sup(A)$ konvergiert.
b. Ist A nach unten beschränkt, so gibt es eine monoton fallende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A, die gegen $\inf(A)$ konvergiert.

Bemerkung 7.19 (Reihen)
Eine besonders wichtige Klasse von Folgen sind die, bei denen das jeweils nächste Glied entsteht, indem man zum vorhergehenden eine Zahl addiert.[7] Solche Folgen nennt man auch *Reihen.*

Das prominenteste Beispiel dafür sind die *geometrischen Reihen.* Sei dazu zunächst $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < 1$ gegeben. Wir setzen $a_0 := x^0 = 1$ und fordern, daß sich a_n aus a_{n-1} ergibt, indem man x^n addiert, d.h.

$$a_n = a_{n-1} + x^n.$$

Dies ist eine sogenannte *rekursive* Definition der Folge, das n-te Folgenglied wird auf das $n-1$-te zurück geführt. Daraus ergibt sich für a_n unmittelbar die explizite Formel

$$a_n = x^0 + x^1 + x^2 + \ldots + x^{n-1} + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^n.$$

[6]Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *monoton wachsend*, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle n. Analog definiert man *monoton fallend*.

[7]Eigentlich kann man jede Folge so darstellen, aber uns interessieren nur solche, bei denen man schöne Formeln zur Darstellung hat.

In Aufgabe 3.10 wird eine hilfreiche Formel für die endliche geometrische Reihe gezeigt:

$$a_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}. \tag{9}$$

Mit Hilfe der Grenzwertsätze und der geometrischen Folge (siehe Beispiel 7.5) sehen wir, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist mit Grenzwert

$$a_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \longrightarrow \frac{1}{1-x}.$$

Für konvergente Reihen wie die geometrische Reihe hat sich für ihren Grenzwert[8]

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k$$

eine suggestive Notation eingebürgert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Man muß mit dieser Notation aber sehr vorsichtig sein, da in all unseren Zahlbereichen stets nur *endliche* Summen zugelassen sind. Unendliche Summen wie hier sind immer als *Grenzwert* der zugehörigen Reihe gemeint und sind nur dann erlaubt, wenn die Reihen auch konvergieren![9]

Satz 7.20 (Wichtige Beispiele konvergenter Reihen)
Für eine beliebige komplexe Zahl $x \in \mathbb{C}$ *gilt:*

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \\ \cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \\ \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

Bemerkung 7.21
Man kann die Exponentialfunktion, den Cosinus und den Sinus entweder durch bestimmte Eigenschaften charakterisieren und dann zeigen, daß die Grenzwerte obiger Reihen genau die angegebenen Funktionswerte sind, oder man kann die Grenzwerte der Reihen als Definition für die Funktionen verwenden und zeigen, daß diese Funktionen dann die Eigenschaften der Exponentialfunktion, des Cosinus bzw. des Sinus haben. In Vorlesungen zur Analysis wird meist der zweite Weg gewählt. Für

[8] In der Tat wird der Ausdruck $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ nicht nur verwendet, um den Grenzwert der geometrischen Reihe zu bezeichnen, sondern es hat sich eingebürgert, damit zugleich auch die Folge $\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)_{n\geq 0}$ zu bezeichnen. Das liegt daran, daß Mathematiker von Natur aus bequeme Menschen sind und möglichst wenig schreiben wollen. Leider verwirrt es Studienanfänger zu Beginn. Wir wollen uns im Vorkurs mit diesem Problem nicht weiter belasten und betrachten die unendlichen Summen ausschließlich als Grenzwert der zugehörigen Folge.

[9] Für $|x| \geq 1$ kann man übrigens mit Hilfe von (9) zeigen, daß die Reihe divergiert.

den Vorkurs kann uns das egal sein. Wichtig ist nur, sich zu merken, daß die obigen Gleichungen gelten.

Damit ist dann auch die Gleichung

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)$$

für jede reelle Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ aus Bemerkung 4.12 *leicht* einzusehen:

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} = \exp(i\alpha) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \cdot \alpha^k}{k!} \\ &\overset{!}{=} \sum_{\text{gerade } k} \frac{i^k \cdot \alpha^k}{k!} + \sum_{\text{ungerade } k} \frac{i^k \cdot \alpha^k}{k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} \cdot \alpha^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} \cdot \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^2)^n \cdot \alpha^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i \cdot (i^2)^n \cdot \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \alpha^{2n}}{(2n)!} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha). \end{aligned}$$

Ich hoffe, die einzelnen Rechenschritte sind ohne große Probleme nachvollziehbar. Wenn dem so ist, dann schaut Euch das Gleichheitszeichen mit dem Ausrufezeichen nochmal genauer an. Hier zerlegen wir die *Summe* in ihre *geraden* Summanden und in ihrer *ungeraden* Summanden! Bei jeder endlichen Summe dürfen wir das, wegen des Kommutativgesetzes und des Assoziativgesetzes. Unsere *unendlichen Summen* sind ja aber keine Summen, sondern *Grenzwerte* von Folgen! Wieso ist das dabei auch erlaubt?

Setzen wir

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \quad b_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad \text{und} \quad c_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ ungerade}}}^{n} \frac{x^k}{k!},$$

so gilt

$$a_n = b_n + c_n.$$

Der Rest folgt dann aus den Grenzwertsätzen.

Bemerkung 7.22 (Vom Nutzen der Folgen)
Selbst wenn man nur an Funktionen interessiert ist und für den Begriffs des sich Näherns die kontinuierliche Fassung bevorzugt, die wir in unserer Vorlesung umgehen, zeigt uns Satz 7.20, daß wir in der Analysis nicht ohne Folgen auskommen. Die wichtigsten Funktionen der Analysis werden durch Reihen und d.h. als Grenzwerte von Folgen definiert! Will man Näherungswerte für die Funktionswerte ausrechnen, verwendet man diese Reihen. Man bricht die *unendliche Summe* nach endliche vielen

Summanden ab und nutzt dies als Näherungswert. D.h. man verwendet eines der Folgenglieder als Näherungswert. Das geht gut, weil eine genauere Untersuchung uns erlaubt, den Fehler abzuschätzen, den wir dabei machen, und weil dieser sehr klein wird, wenn wir nur hinreichend viele Summanden genommen haben. Dies wird genauer in der numerischen Mathematik thematisiert.

Aufgabe 7.23

Bestimme für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ eine Zahl N_ε, so daß $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt, wenn $\varepsilon = \frac{1}{10}$ ist.

Aufgabe 7.24

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein konvergente Folge. Ist dann $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ immer eine Nullfolge?

Aufgabe 7.25

Untersuche die folgenden Folgen auf ihr Konvergenzverhalten:

a. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n^3-2}{n^2}$.

b. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = a_n - n + 3$.

c. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \frac{3n^3+n^2+2}{(2n+1)\cdot(n^3+1)}$.

Aufgabe 7.26

Untersuche die folgenden Folgen auf ihr Konvergenzverhalten:

a. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(\frac{3^{n+1}+2^n}{3^n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

c. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \sqrt[n]{1 - x^n}$ für $x \in (-1, 1)$.

Aufgabe 7.27

Was kann man über das Konvergenzverhalten der geometrischen Folge $(x^n)_{n\geq 0}$ für $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| = 1$ bzw. $|x| > 1$ sagen?

Aufgabe 7.28 (Monotoniekriterium für beschränkte Folgen)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt*, wenn die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

Begründe, weshalb eine monoton wachsende (bzw. fallende) beschränkte Folge konvergent ist. Wie charakterisiert man ihren Grenzwert?

Aufgabe 7.29

Untersuche die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

hinsichtlich ihres Konvergenzverhaltens. Betrachte zunächst einige Folgenglieder und stelle eine Vermutung auf.

Aufgabe 7.30 (Heron-Verfahren zur Berechnung von Quadratwurzeln)

Es sei $c \in \mathbb{R}_{>0}$ eine positive reelle Zahl. Wir setzen $a_0 := 1$ und für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir a_{n+1} durch die Rekursionsvorschrift

$$a_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) > 0.$$

Zeige mit Hilfe des Monotoniekriteriums für beschränkte Folgen, daß die Folge konvergiert und berechne ihren Grenzwert.

Aufgabe 7.31

Zeige, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)}$$

konvergiert und bestimme ihren Grenzwert. Schreibe dazu zunächst $\frac{1}{k\cdot(k+1)}$ in der Form $\frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$ für geeignete Zahlen A und B.

Aufgabe 7.32

Stimmt es, daß aus der Konvergenz einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Form

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

notwendigerweise folgt, daß $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 7.33

Leite die folgenden Eigenschaften der Exponentialfunktion, des Sinus und des Cosinus aus ihrer Reihendarstellung bzw. der Gleichung $\exp(ix) = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$ ab:

a. Für $x, y \in \mathbb{K}$ gilt

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

b. Für $x \in \mathbb{K}$ gelten

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

und

$$\cos(-x) = \cos(x).$$

Wir nennen den Sinus eine *ungerade* Funktion und den Cosinus eine *gerade.*

c. Für $x \in \mathbb{K}$ gilt

$$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1.$$

d. Für $x \in \mathbb{K}$ gilt

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

und

$$\sin(x) = \frac{1}{2i} \cdot \left(e^{ix} - e^{-ix}\right).$$