**Aufgabe 9.30**
Bestimme alle Extrema der Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto (1-x)\cdot\sqrt{1+9x^2}$.

**Aufgabe 9.31**
Bestimme die Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^4-5x^2}{4\cdot(x-1)^3}.$$

Untersuche die Funktion hinsichtlich Monotonie auf dem Intervall $(1,\infty)$.

**Aufgabe 9.32**
Berechne die folgenden Grenzwerte:

a. $\lim_{x\to\pi} \frac{\cos(x)+1}{x^2-\pi^2}$ mit $x < \pi$.
b. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right)$ mit $x > 1$.
c. $\lim_{x\to 0} x^x$ mit $x > 0$.

**Aufgabe 9.33**
Finde einen Näherungswert für die Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 + x^2 - 7x - 7$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens.

**Aufgabe 9.34**
Finde einen Näherungswert für die Nullstelle der Funktion $f(x) = x^{15}-2$ im Intervall $[1,2]$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens.

**Aufgabe 9.35**
Wie muß man die reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ wählen, daß die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-3}, & \text{für } x \leq 2, \\ ax^2 + 2x + b, & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

differenzierbar wird?

**Aufgabe 9.36**
Kann man $a \in \mathbb{R}$ so wählen, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wächst?

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{ax}{x-3} & \text{wenn } x > 3 \\ 2x + a & \text{wenn } x \leq 3 \end{cases}$$

## § 10 Integralrechnung

Ziel der Integralrechnung ist die Entwicklung einer Theorie, die es erlaubt, Flächeninhalte zu berechnen, die der Graph einer Funktion mit der $x$-Achse einschließt.

### I) Integrierbarkeit und das Integral

**Definition 10.1** (Integrierbarkeit und das Integral)
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Ein Tupel $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ mit $n \geq 1$ heißt eine

*Zerlegung* des Intervalls $[a, b]$, falls

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Die $x_i$ heißen die *Stützpunkte* der Zerlegung.

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, so definieren wir die *Obersumme* von $f$ bezüglich $Z$ als

$$\mathrm{OS}(f, Z) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

und die *Untersumme* von $f$ bezüglich $Z$ als

$$\mathrm{US}(f, Z) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

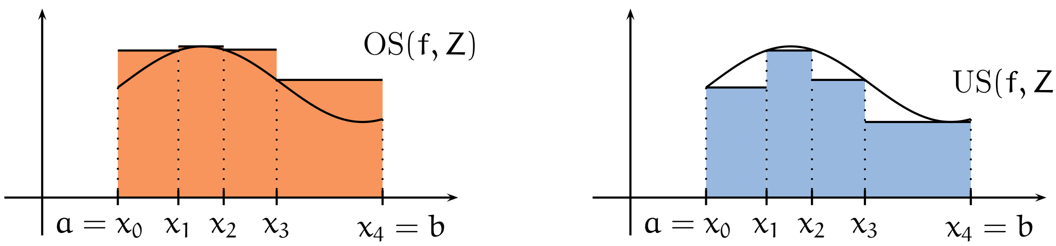


ABBILDUNG 12. Ober und Untersummen

Dann definieren das *Oberintegral*

$$\mathrm{OI}(f) := \inf\left\{ \mathrm{OS}(f, Z) \;\middle|\; Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\right\}$$

von $f$ als Infimum aller Obersummen und das *Unterintegral*

$$\mathrm{UI}(f) := \sup\left\{ \mathrm{US}(f, Z) \;\middle|\; Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\right\}$$

von $f$ als Supremum aller Untersummen, so daß offensichtlich $\mathrm{UI}(f) \leq \mathrm{OI}(f)$ gilt.

Schließlich nennen wir $f$ *integrierbar* auf $[a, b]$, falls $\mathrm{UI}(f) = \mathrm{OI}(f)$. Dann heißt

$$\int_a^b f(x)\, dx := \mathrm{OI}(f) \in \mathbb{R}$$

das *Integral* von $f$ auf $[a, b]$.

**Beispiel 10.2**

Wir betrachten die einfache Funktion $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x$ auf dem Intervall $[0, 1]$ sowie die folgende äquidistante Zerlegung der Länge $\frac{1}{n}$

$$Z^n = (x_0, \ldots, x_n) = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right).$$

Auf einem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i] = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ gilt dann

$$m_i := \inf\left\{f(x) \;\middle|\; x \in [x_{i-1}, x_i]\right\} = x_{i-1} = \frac{i-1}{n}$$

und

$$M_i := \sup\left\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\right\} = x_i = \frac{i}{n}.$$

Für die Unter- und Obersumme von $f$ bezüglich $Z$ ergibt sich unter Berücksichtigung von Beispiel 3.5 damit

$$\mathrm{US}(f, Z^n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot m_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{i-1}{n} = \frac{n \cdot (n-1)}{2 \cdot n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

und

$$\mathrm{OS}(f, Z^n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot M_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{i}{n} = \frac{n \cdot (n+1)}{2 \cdot n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Es gilt dann

$$\mathrm{US}(f, Z^n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} = \mathrm{OS}(f, Z^n).$$

Bilden wir nun den Grenzwert für $n$ gegen unendlich, so erhalten wir

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{US}(f, Z^n) \leq \mathrm{UI}(f) \leq \mathrm{OI}(f) \leq \lim_{n\to\infty} \mathrm{OS}(f, Z^n) = \frac{1}{2}.$$

Wegen des Einschachtelungssatzes müssen das Ober- und Unterintegral dann gleich sein, d.h. $f$ ist integrierbar auf $[0, 1]$ mit

$$\int_0^1 x\,dx = \mathrm{OI}(f) = \mathrm{UI}(f) = \frac{1}{2}.$$

**Bemerkung 10.3** (Das Riemann-Integral als Flächeninhalt)
Wenn die Funktion nur nicht-negative Werte annimmt, dann sind die Untersummen von $f$ nach oben beschränkt durch den Flächeninhalt I der Fläche, die der Graph von $f$ mit der $x$-Achse einschließt, und die Obersummen von $f$ sind durch diesen nach unten beschränkt. Aufgrund der Definition von $\mathrm{OI}(f)$ als Infimum und $\mathrm{UI}(f)$ als Supremum gilt also stets $\mathrm{UI}(f) \leq \mathrm{I} \leq \mathrm{OI}(f)$. Daß $f$ integrierbar ist, bedeutet mithin nichts anderes, als daß das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ den Flächeninhalt der Fläche beschreibt, die der Graph von $f$ auf dem Intervall $[a, b]$ mit der $x$-Achse einschließt.

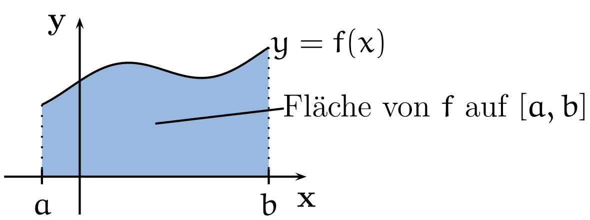


ABBILDUNG 13. Das Integral als Flächeninhalt

**Satz 10.4** (Integrationsregeln)
*Es seien* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *und* $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *zwei integrierbare Funktionen,* $c, d \in \mathbb{R}$. *Dann sind die Funktionen* $c \cdot f + d \cdot g$ *und* $|f|$ *integierbar und es gelten*

$$\int_a^b (c \cdot f + d \cdot g)(x)\ dx = c \cdot \int_a^b f(x)\ dx + d \cdot \int_a^b g(x)\ dx$$

*sowie*

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\ dx.$$

**Bemerkung 10.5** (Verallgemeinerte Dreiecksungleichung)
Da das Integral als Grenzwert von Obersummen berechnet werden kann, kann man die Integration als eine verallgemeinerte Summe betrachten. In diesem Sinne ist die Ungleichung in Satz 10.4 dann eine Verallgemeinerung der Dreiecksungleichung $|x+y| \le |x| + |y|$.

Der folgende Satz besagt, daß man ein Integral auch stückweise berechnen kann, indem man das Intervall $[a, b]$ in kleinere Intervalle zerlegt.

**Satz 10.6** (Additivität des Integrals)
*Ist* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrierbar und* $c \in (a, b)$*, so gilt*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$$

## II) Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Eine naheliegende Frage ist, wie der Begriff der Integrierbarkeit mit den Begriffen der stetig und differenzierbar zusammenhängt?

**Satz 10.7** (Stetige Funktionen sind integrierbar.)
*Ist* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig, so ist* $f$ *integrierbar auf* $[a, b]$.

Die stetigen Funktionen sind die wichtigste Klasse integrierbarer Funktionen. Mithin sind Polynomfunktionen, trigonometrische Funktionen sowie die Exponentialfunktion und der Logarithmus integrierbar.

Der Zusammenhang zwischen Integration und Differenziation ist noch tiefer. Man kann das eine als Umkehrung des anderen auffassen. Das ist die zentrale Botschaft des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

**Definition 10.8**
Es sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine differenzierbare Funktion $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $F' = f$ heißt *Stammfunktion* von $f$.

**Satz 10.9** (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
*Es sei* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig.*

a. *Die Funktion* $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \int_a^y f(x)\,dx$ *ist eine Stammfunktion von* $f$.
b. *Ist umgekehrt* $F$ *eine irgendeine Stammfunktion von* $f$*, so gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

**Bemerkung 10.10**
Es sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

a. Ist $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f$, so schreiben wir auch

$$F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

b. Wir nennen den Ausdruck

$$\int f(x)\,dx$$

ein *unbestimmtes Integral.* Man verwendet ihn gemeinhin, um eine beliebige Stammfunktion $F$ zu bezeichnen, und schreibt dann $F(y) = \int^y f(x)\,dx$.

Wir haben für eine Vielzahl stetig differenzierbarer Abbildungen die Ableitungen kennengelernt. Im Umkehrschluß haben wir damit für die Ableitungsfunktionen auch Stammfunktionen gefunden. Wir wollen für einige wichtige Beispiele von Funktionen $f$ hier die Stammfunktionen $F$ in tabellarischer Form zusammenstellen.

**Satz 10.11** (Einige ausgewählte Stammfunktionen)

| $f$ | $F = \int f(x)\,dx$ | $f$ | $F = \int f(x)\,dx$ |
|---|---|---|---|
| exp | exp | $f(x) = \frac{1}{x}$ | ln |
| cos | sin | sin | $-\cos$ |
| $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ | arctan | $\frac{1}{\cos^2}$ | tan |

**Beispiel 10.12** (Flächeninhalt eines Sinusbogens)
Wir können den Flächeninhalt unter einem der Bögen der Sinusfunktion berechnen als

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = 1 + 1 = 2.$$

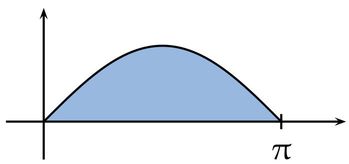


Abbildung 14. Flächeninhalt unter einem Sinusbogen

## III) Integrationsmethoden

Wenn die Integration die Umkehrung der Differenziation ist, so kann man versuchen, die Ableitungsregeln umzukehren, um Methoden zur Berechnung von Integralen zu finden.

**Satz 10.13** (Partielle Integration)
*Sind* $u, v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar, dann gilt*

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx.$$

**Bemerkung 10.14** (Partielle Integration als Umkehrung der Produktregel)
Die partielle Integration ist die Umkehrung der Produktregel. Man wendet sie an, wenn man hofft, das Integral über $u' \cdot v$ leichter berechnen zu können als das über $u \cdot v'$. Auch mit partieller Integration kann man Stammfunktionen berechnen, indem man $b$ durch die Variable $y$ ersetzt und $a$ ignoriert.

**Beispiel 10.15** (Stammfunktion von $\cos^2$)
Wir wollen eine Stammfunktion von $\cos^2$ mit Hilfe partieller Integration berechnen. Dazu betrachten wir $u(x) = \cos(x)$ und $v'(x) = \cos(x)$. Dann ist $v(x) = \sin(x)$, und es gilt

$$\begin{aligned}
\int^y \cos^2(x)\, dx = \int^y u(x) \cdot v'(x)\, dx &= u(x) \cdot v(x)\Big|^y - \int^y u'(x) \cdot v(x)\, dx \\
&= \cos(x) \cdot \sin(x)\Big|^y - \int^y - \sin^2(x)\, dx \\
&= \cos(x) \cdot \sin(x)\Big|^y - \int^y \cos^2(x) - 1\, dx \\
&= \cos(x) \cdot \sin(x)\Big|^y - \int^y \cos^2(x)\, dx + \int^y 1\, dx \\
&= \cos(x) \cdot \sin(x)\Big|^y - \int^y \cos^2(x)\, dx + x\Big|^y.
\end{aligned}$$

Addieren wir auf beiden Seiten $\int^y \cos^2(x)\, dx$ und teilen durch $2$, so erhalten wir

$$\int^y \cos^2(x)\, dx = \frac{1}{2} \cdot \big(y + \cos(y) \cdot \sin(y)\big).$$

**Satz 10.16** (Substitutionsregel)
*Es sei* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall,* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig und* $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar mit* $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq I$. *Dann gilt*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx = \int_a^b f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)\, dx.$$

**Bemerkung 10.17** (Die Substitutionsregel als Umkehrung der Kettenregel)

a. Die Substitutionsregel ist die Umkehrung der Kettenregel.

b. Es ist üblich, bei der Formel für die Substitutionsregel auf der linken Seite statt der Variablen $x$ die Variable $z$ zu verwenden, so daß die Formel folgende Gestalt hat:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(z)\, dz = \int_a^b f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)\, dx.$$

Man sagt dann, daß man $\varphi(x)$ durch $z$ substituiert oder umgekehrt, je nachdem ob man die linke durch die rechte Seite ausrechnen will oder umgekehrt. Man schreibt $z = \varphi(x)$.

Diese Schreibweise kann man nutzen, um sich für die Substitution eine Eselsbrücke zu bauen. In Anlehnung an die Schreibweise $\varphi' = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ kann man mit $z = \varphi(x)$ dann auch

$$\varphi'(x)\,dx = \frac{dz}{dx}\,dx = dz$$

schreiben. Damit wird aus der Substitutionsformel ohne Integralgrenzen dann

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx = \int f(z) \cdot \frac{dz}{dx}\,dx = \int f(z)\,dz.$$

c. Man kann mit Hilfe der Substitutionsregel auch Stammfunktionen ausrechnen, indem man die Integrationsgrenze $b$ durch die Variable $y$ ersetzt und $a$ ignoriert.

**Beispiel 10.18** (Stammfunktion von $x \mapsto x \cdot \exp(x^2)$)

Wir wollen das Integral $\int_a^b x \cdot \exp\left(x^2\right) dx$ für $a, b \in \mathbb{R}$ berechnen. Dazu substituieren wir $z = x^2$, d.h. wir betrachten $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$, $\varphi'(x) = 2x$ und $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : z \mapsto \frac{\exp(z)}{2}$. Da zudem $f$ eine Stammfunktion von $f$ ist, folgt damit

$$\int_a^b x \cdot \exp\left(x^2\right) dx = \int_a^b f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(z)\,dz$$
$$= \int_{a^2}^{b^2} \frac{\exp(z)}{2}\,dz = \frac{\exp\left(b^2\right)}{2} - \frac{\exp\left(a^2\right)}{2}.$$

**Aufgabe 10.19**

Berechne die folgenden Integrale:

a. $\int_1^3 x^5 - 2\,dx$.

b. $\int_0^\pi \sin(x)\,dx$.

c. $\int_0^\pi \cos(x)\,dx$.

d. $\int_2^2 (x^{120} + x^{13} - 9228x^7) dx$.

e. $\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx$.

f. $\int_0^\pi \sin^2(x) \cdot \cos(x)\,dx$.

g. $\int_1^e \frac{1}{x\cdot(1+\ln(x))}\,dx$.

h. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos(x)\,dx$.

i. $\int_{-3}^4 |x| dx$.

j. $\int_y^2 (3x^2 + 7x + 17) dx$.

**Aufgabe 10.20**

Bestimme für die folgenden Funktionen jeweils eine Stammfunktion:

a. $f_1(x) = e^x + \sin(x)$.

b. $f_2(x) = e^{2x} + \frac{3}{1+x^2}$.

c. $f_3(x) = \frac{1}{x+2}$.

d. $f_4(x) = \frac{2x}{x^2+2}$.

e. $f_5(x) = x^2 \cdot e^x$.

f. $f_6(x) = e^{\cos(x)} \cdot \sin(x)$.

**Aufgabe 10.21**
Berechne den Flächeninhalt des von den Graphen von $f$ und $g$ eingeschlossenen Flächenstücks, für

a. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 5, \quad g(x) = 3$.

b. $f(x) = x^3 + x^2 - x, \quad g(x) = 2x^2 + x$.

**Aufgabe 10.22**
Zeige, für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt die Gleichung

$$\int_0^a |x| \, dx = \frac{a \cdot |a|}{2}.$$

**Aufgabe 10.23**
Es sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar auf $[a, b]$ mit $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$. Begründe, weshalb dann

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M \cdot (b - a)$$

gilt. Nutze diese Ungleichung, um für folgende Integrale eine obere und eine untere Schranke anzugeben:

a. $\int_0^5 x^3 \sin(x) \, dx$.

b. $\int_0^1 \frac{1}{1+e^{x^2}} \, dx$.

c. $\int_2^4 \frac{e^x}{3-x} \, dx$.

**Aufgabe 10.24**
Es gilt $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Schreibe diesen Ausdruck mit Hilfe der geometrischen Reihe als Reihe und berechne durch gliedweise Integration eine Reihendarstellung für den Arcustangens. Wenn man dann noch $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ beachtet, so kann man eine Reihendarstellung für die Zahl $\pi$ herleiten.