Aufgabe 13.37
Berechne die Eigenwerte der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 13.38
Überprüfe, ob die folgenden symmetrischen Matrizen positiv definit sind:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 14 Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme spielen in vielen Bereichen der Mathematik und ihrer Anwendungen eine große Rolle. Im vorliegenden Abschnitt wollen wir zeigen, wie man lineare Gleichungssysteme lösen kann. Wir werden dabei wenig auf die algebraische Struktur der Lösungsmenge eingehen können. In Anhang D finden sich Fragestellungen aus Anwendungen, die bei der Modellbildung zu einem linearen Gleichungssystem führen.

I) Lineare Gleichungssysteme und der Gauß-Algorithmus

Definition 14.1 (Lineare Gleichungssysteme)

a. Ein *lineares Gleichungssystem* über $\mathbb{R}$

$$\text{(LGS)} \qquad \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

besteht aus m Gleichungen in n *Unbestimmten* oder *Variablen* $x_1, \ldots, x_n$ mit $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$.
Da sich (LGS) mit $A = (a_{ij})$, $b = (b_1, \ldots, b_m)^t$ und $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$ vermittels Matrixmultiplikation auch kurz schreiben läßt als

$$Ax = b,$$

sprechen wir meist von dem *linearen Gleichungssystem* $Ax = b$.

b. Die Matrix

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$$

heißt *Koeffizientenmatrix* und der Vektor $b = (b_1, \ldots, b_m)^t \in \mathbb{R}^m$ die *Inhomogenität* des Gleichungssystems (LGS). Ferner heißt die Matrix

$$(A \mid b) := \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \in \operatorname{Mat}\big(m \times (n+1), \mathbb{R}\big)$$

die *erweiterte Koeffizientenmatrix* von (LGS).

c. Das lineare Gleichungssystem (LGS) heißt *homogen*, falls $b = 0_{\mathbb{R}^m}$ der Nullvektor in $\mathbb{R}^m$ ist. Ansonsten heißt das System *inhomogen*.

d. Ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ gegeben, so heißt das Gleichungssystem $Ax = 0$ (mit $0 = 0_{\mathbb{R}^m}$) das *zugehörige homogene Gleichungssystem*.

e. Ein Vektor $c = (c_1, \ldots, c_n)^t \in \mathbb{R}^n$ heißt *Lösung* von (LGS), wenn die Gleichung $Ac = b$ erfüllt ist. Die Menge aller Lösungen von (LGS) wird mit

$$\text{Lös}(A, b) := \big\{c \in \mathbb{R}^n \mid Ac = b\big\}.$$

bezeichnet.

Beispiel 14.2
Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ist inhomogen, hat als Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R}),$$

und als erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \in \operatorname{Mat}(3 \times 4, \mathbb{R}).$$

Bemerkung 14.3 (Lineare Gleichungssysteme)

a. Bei einem linearen Gleichungssystem sind also Körperelemente a_{ij} und b_i fest vorgegeben, während für die Unbestimmten x_j Körperelemente c_j gesucht werden, die das Gleichungssystem lösen.

b. Ein lineares Gleichungssystem kann entweder gar keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen haben. Wenn unendlich viele Lösungen vorliegen, wollen wir diese parametrisieren in der Form

$$\text{Lös}(A, b) = c + \text{Lös}(A, 0) = \{c + \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_k \cdot v_k \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\},$$

wobei c eine spezielle Lösung von $Ax = b$ ist und $v_1, \ldots, v_k$ geeignete Lösungen des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems sind, eine sogenannte *Basis* des Lösungsraums $\text{Lös}(A, 0)$. Auf dem Weg ist die Struktur der Lösungsmenge ersichtlich — es handelt sich um einen sogenannten affinen Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

c. Ein homogenes lineares Gleichungssystem $Ax = 0$ ist immer lösbar mit $x = 0$ als Lösung. Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem muß nicht lösbar sein. Insofern ist das folgende Kriterium für die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems sinnvoll. Wir erinnern dabei, daß der Rang einer Matrix die Anzahl der Stufen in einer zugehörigen Zeilen-Stufen-Form ist.

Satz 14.4 (Kriterium für die Lösbarkeit eines LGS)
Ein Gleichungssystem $Ax = b$ *ist genau dann lösbar, wenn* $\text{rang}(A) = \text{rang}(A \mid b)$.

Für ein Beispiel siehe Beispiel 14.9.

Bemerkung 14.5
Das folgende Lemma sagt, daß der Informationsgehalt über die Lösungsmenge der erweiterten Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems bei elementaren Zeilenoperationen erhalten bleibt. Man wird also den Gauß-Algorithmus anwenden können, um die Matrix in reduzierte Zeilen-Stufen-Form zu bringen, in der Hoffnung, die Lösungsmenge dann gleich ablesen zu können.

Lemma 14.6 (Elementare Zeilenoperationen ändern den Lösungsraum nicht.)
Sind $A, A' \in \text{Mat}(m \times n, K)$ *und* $b, b' \in K^m$ *und entsteht die Matrix* $(A' \mid b')$ *aus* $(A \mid b)$ *durch elementare Zeilenoperationen, so gilt*

$$\text{Lös}(A, b) = \text{Lös}\left(A', b'\right).$$

Satz 14.7 (Lösbarkeitskriterium für ein LGS mittels Gauß-Algorithmus)
Sei $A \in \text{Mat}(m \times n, K)$ *eine Matrix in Zeilen-Stufen-Form und* $b \in K^m$. *Die erweiterte Koeffizientenmatrix habe die Gestalt*

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccccccccccccc|c}
0 & \ldots & 0 & a_{1j_1} & * & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & * & b_1 \\
0 & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0 & a_{2j_2} & * & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & * & b_2 \\
\vdots & & & & & & & \ddots & & & & & \vdots & \vdots \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & 0 & a_{rj_r} & * & \ldots & \ldots & * & b_r \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & b_{r+1} \\
\vdots & & & & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & b_m
\end{array}\right) \tag{13}$$

mit Pivots $a_{ij_i} \neq 0$ *für* $i = 1, \ldots, r$. *Dann gilt:*

a. $Ax = b$ *ist genau dann lösbar, wenn* $b_{r+1} = \ldots = b_m = 0$.

b. *Sind* $b_{r+1} = \ldots = b_m = 0$ *und gilt* $r = n$, *so besitzt* $Ax = b$ genau eine *Lösung.*

c. *Sind* $b_{r+1} = \ldots = b_m = 0$ *und ist* $r < n$, *so hat* $Ax = b$ *mehr als eine Lösung.*

Genauer $\text{Lös}(A, b) = c + \text{Lös}(A, 0)$, *wobei* c *eine spezielle Lösung ist und* $\text{Lös}(A, 0)$ *die Dimension* $n - r$ *hat.*

Aus dem Satz ergibt sich der folgende Algorithmus zur Lösung eines linearen Gleichungssystems.

Algorithmus 14.8 (Algorithmus zur Lösung eines LGS)
INPUT: Die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A \mid b)$ eines LGS $Ax = b$.

OUTPUT: Eine spezielle Lösung c von $Ax = b$ und eine Basis B von $\text{Lös}(A, 0)$, sofern das Gleichungssystem lösbar ist.

1. **Schritt:** Berechne eine reduzierte Zeilen-Stufen-Form $(A' \mid b')$ von $(A \mid b)$ mit $r = \text{rang}(A')$.
2. **Schritt:** Ist $b'_{r+1} \neq 0$, dann ist das LGS nicht lösbar.
3. **Schritt:** Überführe $(A' \mid b')$ in eine $n \times (n+1)$-Matrix $(A'' \mid b'')$ durch Einfügen und Streichen von Nullzeilen, so daß die Pivotelemente anschließend auf der Diagonale der Matrix A'' stehen.
4. **Schritt:** Ersetze jede Null auf der Diagonale von A'' durch -1.
5. **Schritt:** Die spezielle Lösung ist $c := b''$ und die Spalten von A'', die eine -1 auf der Diagonale haben, sind eine Basis von $\text{Lös}(A, 0)$.

Beispiel 14.9
Wir betrachten das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 &= 1 \end{aligned} \tag{14}$$

In Matrixschreibweise lautet das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Durch den Gauß-Algorithmus überführen wir die erweiterte Koeffizientenmatrix in reduzierte Zeilen-Stufen-Form:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir sehen, daß $\text{rang}(A) = \text{rang}(A \mid b) = 2$, so daß das Gleichungssystem lösbar ist.

Um die Lösung zu berechnen, fügen wir als zweite Zeile eine Nullzeile ein, um eine 4×5-Matrix zu erzeugen und die Pivotelemente auf der Diagonalen zu haben, und ersetzen die Nullen auf der Diagonalen anschließend durch -1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Damit erhalten wir die letzte Spalte

$$c = (0, 0, 1, 0)^t$$

als spezielle Lösung von (14) und die Spalten 2 und 4 als Basis

$$B = \big((1, -1, 0, 0)^t, (-1, 0, -1, -1)^t\big)$$

des Lösungsraums $\text{Lös}(A, 0)$ des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$. Insgesamt gilt damit

$$\text{Lös}(A, b) = c + \text{Lös}(A, 0) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

II) Die Cramersche Regel

Bemerkung 14.10 (Cramersche Regel)
Ein quadratisches lineares Gleichungssystem $Ax = b$ ist eindeutig lösbar, wenn A invertierbar ist und die Lösung ist dann $x = A^{-1}b$. Auch ohne A^{-1} auszurechnen kann man eine geschlossene Formel für die Lösung mit Hilfe der Determinante angeben. Diese ist für praktische Anwendungen ungeeignet, da der Gauß-Algorithmus schneller funktioniert, aber aus theoretischer Sicht ist die Formel interessant. Sie sagt u.a., daß die Lösung stetig von den Eingabedaten abhängt, da die Lösungsformel durch rationale Funktionen in den Eingabedaten gegeben ist. Wenn dies Eingabedaten durch Messungen entstanden sind, sind sie automatisch mit kleinen Fehlern behaftet. Diese führen wegen der Stetigkeit aber auch nur zu kleinen Abweichungen bei der Lösung.

Satz 14.11 (Cramersche Regel)
Es sei $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ *invertierbar und* $b \in \mathbb{R}^n$.

Für die eindeutig bestimmte Lösung $x = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ *von* $Ax = b$ *gilt dann*

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Beispiel 14.12
Wir wollen das folgende Gleichungssystem mit Hilfe der Cramerschen Regel lösen:

$$x + 2z = 3, \quad 3x + y = 5 \quad \text{und} \quad -x + y = 1.$$

Das lineare Gleichungssystem hat die Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Inhomogenität $b = (3, 5, 1)^t$. Die Determinante von A ist

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (3+1) = 8.$$

Damit ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar und nach der Cramerschen Regel gilt für die eindeutig bestimmte Lösung $(x, y, z)^t$

$$x = \frac{\det(A_1(b))}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{8} = \frac{2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{8}{8} = 1,$$

$$y = \frac{\det(A_2(b))}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{8} = \frac{2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{16}{8} = 2,$$

$$z = \frac{\det(A_3(b))}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{8}{8} = 1.$$

III) Berechung der Inversen einer Matrix

Wir haben oben gesehen, daß es interessant ist, die Inverse einer Matrix zu berechnen, z.B. um lineare Gleichungssysteme leicht lösen zu können. Der Gauß-Algorithmus erlaubt uns auch dieses. Dem liegt der folgende Satz zugrunde.

Satz 14.13
Eine Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn ihre reduzierte Zeilen-Stufen-Form die Einheitsmatrix ist.

Algorithmus 14.14 (zur Bestimmung der Inversen)
INPUT: $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$.

OUTPUT: Inverse von A, falls sie existiert, eine Fehlermeldung sonst.

1. **Schritt:** Erweitere die Matrix A um $\mathbb{1}_n$ zu $C = (A, \mathbb{1}_n) \in \mathrm{Mat}(n \times 2n, K)$.
2. **Schritt:** Überführe C in reduzierte ZSF $C' = \big(A', B\big)$.
3. **Schritt:** Falls $\mathrm{rang}\big(A'\big) = n$, dann gib B zurück, sonst eine Fehlermeldung.

Beispiel 14.15
Wir betrachten die 3×3-Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, K)$$

und versuchen die Inverse mittels des Algorithmus 14.14 zu bestimmen.

$$\begin{array}{rrr|rrrl}
\multicolumn{3}{c|}{A} & \multicolumn{3}{c}{\mathbb{1}_n} & \\ \hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \qquad \mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} - \mathrm{I} \\ \hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & \qquad \mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + \mathrm{II} \\ \hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \qquad \mathrm{I} \mapsto \mathrm{I} - \mathrm{III} \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \qquad \mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} - \mathrm{III} \\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & \\ \hline
1 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & \qquad \mathrm{I} \mapsto \mathrm{I} - \mathrm{II} \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & \\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & \\ \hline
1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & \\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 &
\end{array}$$

Hieraus ergibt sich gemäß obigem Algorithmus zunächst, daß A invertierbar ist, und ferner, daß

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 14.16
Berechne die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 14.17
Berechne die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems, sofern es lösbar ist:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 6y & + & 2z & = & 4 \\ 2x & - & 2y & - & z & = & 2 \\ 3x & - & 4y & - & 2z & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 14.18

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & & & z & = & ab \\ -2x & + & by & + & az & = & -b \\ & & by & + & (a+1)z & = & b \end{array}$$

außer $(b, 1, 0)$ noch weitere Lösungen. Bestimme sie.

Aufgabe 14.19

Bestimme die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$ in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & ty & + & z & = & 1 \\ tx & + & ty & + & z & = & 1+t \end{array}$$

Für Werte von t für die das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung besitzt, verifiziere diese mit Hilfe der Camerschen Regel.

Aufgabe 14.20

Bestimme die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}).$$