KAPITEL III

Lineare Algebra

§ 12 Matrizen und der Gauß-Algorithmus

I) Matrizen

Definition 12.1 (Matrizen und der $\mathbb{R}^n$)
Es seien $m, n \geq 1$ zwei positive ganze Zahlen.

a. Eine $m \times n$-*Matrix* über $\mathbb{R}$ ist ein rechteckiges Schema A mit Einträgen aus $\mathbb{R}$ der Form
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$
Wenn keine Unklarheiten zu befürchten sind, schreiben wir verkürzt auch
$$A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m;j=1,\ldots,n} = (a_{ij}).$$

b. Die Menge aller $m \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$ wird mit
$$\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$$
bezeichnet, und falls $m = n$, dann auch kurz mit $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ und man spricht von *quadratischen Matrizen.*

c. Ist $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix, dann bezeichnen wir
$$a_i := (a_{i1}, \ldots, a_{in})$$
als den i-ten *Zeilenvektor* von A und
$$a^j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$
als den j-ten *Spaltenvektor* von A.

d. Ist $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$, so heißt die $n \times m$-Matrix
$$A^t := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

d. h. für $A^t = (a'_{ij})$ gilt $a'_{ij} = a_{ji}$, die *Transponierte* von A.

e. Schließlich definieren wir

$$\mathbb{R}^n := \operatorname{Mat}(n \times 1, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Elemente von $\mathbb{R}^n$ heißen *Vektoren* oder *Punkte* im $\mathbb{R}^n$. x_i heißt die i-te *Komponente* des Vektors x.

Bemerkung 12.2

Spaltenvektoren nehmen im Skript sehr viel Raum ein. Um platzsparend arbeiten zu können, werden wir deshalb statt den Spaltenvektor $x \in K^n$ als

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

anzugeben, meist den *transponierten* Zeilenvektor

$$x = (x_1 \ \ldots \ x_n)^t$$

betrachten, und um Mißverständnissen vorzubeugen, fügen wir zudem meist Kommata als Trennsymbole ein

$$x = (x_1, \ldots, x_n)^t.$$

Definition 12.3 (Operationen mit Matrizen)

a. Es seien $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \operatorname{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$, dann definiert man

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \ldots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \ldots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \ldots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

b. Für zwei Vektoren $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)^t$ in $\mathbb{R}^n$ definieren wir das *Skalarprodukt* von x und y als

$$\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i.$$

c. Ist $A = (a_{ij}) \in \operatorname{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ eine $m \times n$-Matrix und $x = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ ein Spaltenvektor in $\mathbb{R}^n$, dann definieren wir das Produkt

$$A \circ x := \begin{pmatrix} \langle a_1^t, x \rangle \\ \langle a_2^t, x \rangle \\ \vdots \\ \langle a_m^t, x \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix}$$

der Matrix A mit dem Vektor x als einen Vektor in $\mathbb{R}^m$, dessen i-te Komponente das Skalarprodukt der i-ten Zeile von A mit x ist.

d. Sind $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ und $B = (b_{jk}) \in \mathrm{Mat}(n \times p, \mathbb{R})$ zwei Matrizen, wobei A genauso viele Spalten wie B Zeilen hat. Dann definieren wir das *Matrixprodukt* durch

$$A \circ B := C, \quad \text{mit } C = (c_{ik}) \in \mathrm{Mat}(m \times p, \mathbb{R}) \text{ und } c_{ik} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

Die k-te Spalte von C ist damit das Produkt von A mit der k-ten Spalte von B, und d.h. der Eintrag c_{ik} ist das Skalarprodukt der i-ten Zeile von A mit der k-ten Spalte von B. Das Matrixprodukt zweier Matrizen verallgemeinert also das Produkt einer Matrix mit einem Vektor.

Beispiel 12.4
Folgende Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(2 \times 3, \mathbb{R})$ und $C \in \mathrm{Mat}(3 \times 2, \mathbb{R})$ seien gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 0+2 & 2+1 \\ 3+0 & 1+4 & 2+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

und

$$A \circ x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{aligned} A \circ C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

II) Der Gauß-Algorithmus

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß man jede Matrix durch elementare Zeilenoperationen in Zeilen-Stufen-Form transformieren kann, und einen Algorithmus angeben, der dies tut, den *Gauß-Algorithmus*.

Definition 12.5 (Zeilen-Stufen-Form)
Eine Matrix A ist in *Zeilen-Stufen-Form*, wenn sie von der folgenden Gestalt ist,

$$A = \begin{pmatrix}
0 & \ldots & 0 & a_{1j_1} & * & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & * \\
0 & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0 & a_{2j_2} & * & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & * \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0 & a_{3j_3} & * & \ldots & \ldots & \ldots & * \\
\vdots & & & & & & & & & & \ddots & & & & \vdots \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & a_{rj_r} & * & \ldots & * \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0
\end{pmatrix}$$

wobei die a_{ij_i} ungleich 0 sein sollen und die *Pivots* der Zeilen-Stufen-Form genannt werden.

Wir sagen zudem, daß A *reduzierte Zeilen-Stufen-Form* hat, wenn alle Pivots Eins und die Einträge in der Spalte oberhalb der Pivots alle Null sind.

Beispiel 12.6
Betrachte die Matrizen $A, B, C \in \mathrm{Mat}(4 \times 5, \mathbb{R})$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist in reduzierter ZSF mit $j_1 = 2$, $j_2 = 3$ und $j_3 = 5$.
Die Matrix B ist in ZSF mit $j_1 = 1$, $j_2 = 2$, $j_3 = 3$ und $j_4 = 4$. Die ZSF ist aber nicht reduziert.
Die Matrix C ist nicht in ZSF. Aber durch Vertauschen der beiden ersten Zeilen entsteht eine Matrix, die ZSF hat.

Unser Ziel ist es, eine Matrix durch sogenannte elementare Zeilenoperationen auf Zeilen-Stufen-Form zu bringen. Dabei sind die folgenden drei Typen von elementaren Zeilenoperationen erlaubt.

Definition 12.7 (Elementare Zeilenoperationen)
Für eine Matrix A heißen die folgenden Operationen *elementare Zeilenoperationen*:

I Multipliziere die i-te Zeile von A mit einer Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}$.

II Addiere zur i-ten Zeile von A das λ-fache der j-ten Zeile.

III Vertausche in A die i-te und j-te Zeile.

Der Beweis des folgenden Satzes ist konstruktiv. Der daraus abgeleitete Algorithmus ist der sogenannte Gauß-Algorithmus.

Satz 12.8 (Existenz der reduzierten Zeilen-Stufen-Form)
Jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ *läßt sich mittels endlich vieler elementarer Zeilenoperationen in reduzierte Zeilen-Stufen-Form* rZSF(A) *überführen.*

Jede Zeilen-Stufen-Form, die aus A *durch elementare Zeilenoperationen hervorgeht, hat die gleiche Anzahl an Nicht-Null-Zeilen. Diese Zahl nennen wir den* Rang *von* A*,* rang(A)*.*

Algorithmus 12.9 (Gauß-Algorithmus)
INPUT: $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$.

OUTPUT: rZSF(A), die reduzierte Zeilen-Stufen-Form von A.

1. **Schritt:** Falls $A = 0$ oder $m = 1$, gehe zu Schritt 8.
2. **Schritt:** Durchlaufe die erste Spalte von oben nach unten, bis ein Element ungleich Null a_{i1} gefunden wurde oder das Ende der Spalte erreicht ist.
3. **Schritt:** Wurde kein $a_{i1} \neq 0$ gefunden, bilde eine Untermatrix B von A durch Streichen der ersten Spalte von A und gehe zu Schritt 6. Andernfalls, vertausche die Zeilen a_1 und a_i.
4. **Schritt:** Für $k = 2, \ldots, m$ addiere zur k-ten Zeile das $-\frac{a_{k1}}{a_{11}}$-fache der ersten.
5. **Schritt:** Falls $n = 1$, gehe zu Schritt 7. Andernfalls bilde eine Untermatrix B von A, durch Streichen der ersten Zeile und der ersten Spalte von A.
6. **Schritt:** Wende den Algorithmus auf die Untermatrix B an.[1]
7. **Schritt:** Die Matrix A ist nun in ZSF. Für $i = m$ bis $i = 1$, d. h. rückwärts zählend, durchlaufe die Zeile a_i, beginnend mit der ersten Spalte, bis ein Element $a_{ij} \neq 0$ gefunden wurde oder das Ende der Zeile erreicht ist.
   In letzterem Fall tue nichts, in ersterem multipliziere die Zeile a_i mit $\frac{1}{a_{ij}}$ und addiere für $k = 1, \ldots, i-1$ zur k-ten Zeile das $-a_{kj}$-fache der i-ten Zeile.
8. **Schritt:** Gib die (veränderte) Matrix A zurück.

Beispiel 12.10
Wir überführen nun die folgende Matrix in reduzierte ZSF.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ \underline{-1} & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xmapsto{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}} \begin{pmatrix} \underline{-1} & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xmapsto{\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III}+\mathrm{I}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} -1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & \underline{-1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 5 \end{array}\right) \xmapsto{\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III}-2\cdot\mathrm{II}} \begin{pmatrix} \underline{-1} & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \underline{-1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{-1} \end{pmatrix} \xmapsto[\mathrm{III} \mapsto -\mathrm{III}]{\mathrm{I} \mapsto -\mathrm{I}, \mathrm{II} \mapsto -\mathrm{II}}$$

[1] Dies ist der Rekursionsschritt, indem der Algorithmus mit einer kleineren Untermatrix aufgerufen wird. Das Ergebnis, das man dabei zurück erhält, wird wieder in die Matrix A eingefügt.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{II}\mapsto \mathrm{II}+3\cdot \mathrm{III}]{\mathrm{I}\mapsto \mathrm{I}+2\cdot \mathrm{III}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{I}\mapsto \mathrm{I}-3\cdot \mathrm{II}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die vierte Matrix besitzt bereits ZSF mit unterstrichenen Pivots, die letzte ist in reduzierter ZSF.

Wir bemerken, daß wir auch auf anderem Weg zum Ziel gekommen wären, und zwar durch andere Wahl der Pivots.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ \underline{1} & -1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{I}\leftrightarrow \mathrm{III}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II}\mapsto \mathrm{II}+\mathrm{I}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ \hline 0 & 0 & \underline{-2} & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{III}\mapsto \mathrm{III}-\frac{1}{2}\cdot \mathrm{II}} \begin{pmatrix} \underline{1} & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \underline{-2} & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}\mapsto 2\cdot \mathrm{III}]{\mathrm{II}\mapsto -\frac{1}{2}\cdot \mathrm{II}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{II}\mapsto \mathrm{II}+\frac{5}{2}\cdot \mathrm{III}]{\mathrm{I}\mapsto \mathrm{I}-3\cdot \mathrm{III}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{I}\mapsto \mathrm{I}-\mathrm{II}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12.11

Berechne die folgenden Summen von Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12.12

Welche der folgenden Matrizen können in welcher Reihenfolge miteinander multipliziert werden? Berechne ggf. das Matrixprodukt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12.13

Berechne für jede der Matrizen in Aufgabe 12.12 eine reduzierte Zeilen-Stufen-Form.

Aufgabe 12.14
Berechne eine reduzierte Zeilen-Stufen-Form der folgenen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -7 & 10 & -1 \\ -2 & 4 & -7 & 2 \\ 3 & -5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

Aufgabe 12.15
Berechne den Rang der folgenden Matrix in Abhängigkeit von a und b:

$$\begin{pmatrix} 0 & b & b & b \\ a & 0 & b & b \\ a & a & 0 & b \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 4, \mathbb{R}).$$

§ 13 Determinanten

Determinanten von quadratischen Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ spielen in vielen Bereichen der Mathematik eine wichtige Rolle:

- Mit ihrer Hilfe kann man eine geschlossene Formel für die Lösung eines quadratischen linearen Gleichungssystems angeben (Cramersche Regel).
- Eine Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante nicht 0 ist.
- Determinanten liefern ein Kriterium für die Existenz einer lokalen Umkehrabbildung für beliebige differenzierbare Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ (Satz von der Umkehrabbildung).
- Mit Determinanten läßt sich das Volumen von Parallelotopen berechnen.
- Determinanten werden verwendet um die infinitesimale Volumenänderung einer Koordinatentransformation zu berechnen (Transformationssatz für Integrale).
- Eigenwerte von Matrizen werden mit Hilfe von Determinanten berechnet. Sie geben z.B. Auskunft über das Stabilitätsverhalten von Lösungen von Differentialgleichungen. Solche Fragen treten z.B. im Zusammenhang mit dem Untersuchen des Schwingungsverhaltens von Brücken auf.
- Determinanten kommen im hinreichenden Kriterium für Extremstellen von differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ vor.

Dies sind nur einige wenige Anwendungsgebiete, die im Laufe einer Vorlesung zur Höheren Mathematik thematisiert werden. Sie sollen einen Eindruck von der Bedeutung der Determinanten geben.

I) Determinanten und der Gauß-Algorithmus

Definition 13.1 (Determinanten)
Eine Abbildung

$$\det : \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt *Determinantenabbildung*, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

I Geht die Matrix B aus der Matrix A hervor, indem man die *eine* Zeile mit λ multipliziert, so gilt $\det(B) = \lambda \cdot \det(A)$.

II Geht die Matrix B aus der Matrix A hervor, indem man zur i-ten Zeile das λ-fache der j-ten Zeile addiert, so ändert sich die Determinante nicht, d.h. $\det(A) = \det(B)$.

III Geht die Matrix B aus der Matrix A durch Vertauschung zweier Zeilen hervor, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante, d.h. $\det(B) = -\det(A)$.

IV Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix ist das Produkt ihrer Diagonaleinträge, d.h.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * & \dots & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & a_{33} & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1\,n-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Satz 13.2 (Existenz und Eindeutigkeit der Determinante)
Es gibt genau eine Determinantenabbildung $\det : \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Bemerkung 13.3 (Wie berechne ich die Determinante einer Matrix?)
Die Bedingungen I-III legen fest, wie sich die Determinante einer Matrix ändert, wenn man elementare Zeilenoperationen durchführt. Bedinung IV sagt uns, wie man die Determinante einer Zeilen-Stufen-Form berechnet, da diese bei einer quadratischen Matrix immer eine obere Dreiecksmatrix ist. Wir können deshalb den Gauß-Algorithmus anwenden, um die Determinante einer Matrix zu berechnen. Im folgenden Algorithmus ist erläutert, wie man dies macht, wobei der Algorithmus ohne elementare Zeilenoperationen vom Typ I auskommt.

Algorithmus 13.4 (Algorithmus zur Berechnung der Determinante über K)
INPUT: $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

OUTPUT: $\det(A)$.

1. **Schritt:** Setze $d = 1$.
2. **Schritt:** Überführe A mittels Gauß-Algorithmus in nicht-reduzierte ZSF, d. h. führe im Gauß-Algorithmus 12.9 Schritt sieben nicht aus. Jedesmal, wenn dabei zwei Zeilen vertauscht werden, ersetze d durch $-d$. - Wird bei der Gaußreduktion ein Pivotelement zu Null, gib Null zurück und brich ab.
3. **Schritt:** Gib das Produkt von d mit den Diagonalelementen der ZSF zurück.

Beispiel 13.5

a. Wir wollen die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$$

berechnen. Dazu überführen wir sie mittels des Gauß-Algorithmus in ZSF und merken uns die Zeilenvertauschungen.

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto[d=-1]{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto[\mathrm{III} \to \mathrm{III} - 7\mathrm{I}]{\mathrm{II} \to \mathrm{II} - 4\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -21 \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto{\mathrm{III} \to \mathrm{III} - 2\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Damit gilt dann

$$\det(A) = d \cdot 1 \cdot (-3) \cdot (-9) = -27.$$

b. Als zweites Beispiel berechnen wir die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$$

berechnen. Dazu überführen wir sie wieder mittels des Gauß-Algorithmus in ZSF und merken uns die Zeilenvertauschungen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xmapsto[d=1]{\mathrm{II} \to \mathrm{II} - 2\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xmapsto{\mathrm{IV} \to \mathrm{IV} - 2\mathrm{III}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit gilt dann

$$\det(A) = d \cdot 1 \cdot (-4) \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

c. Bei 2×2-Matrizen können wir auf diesem Weg auch eine allgemeine Formel berechnen, die man sich merken kann. Dazu wenden wir den Gauß-Algorithmus auf die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$$

an und nehmen der Einfachheit halber an, daß $a \neq 0$ gilt. Dann bringen wir sie mittels Gauß-Algorithmus auf Zeilen-Stufen-Form:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xmapsto{\mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{II} - \frac{c}{a} \cdot \mathrm{I}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{cb}{a} \end{pmatrix}$$

Für die Determinante von A gilt dann

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot \left(d - \frac{cb}{a}\right) = ad - bc.$$

Die Formel erhält man auch, wenn $a = 0$ ist. Dann sieht nur die Zeilen-Stufen-Form etwas anders aus. Den Fall zu untersuchen, überlasse ich dem geneigten Leser.

Bemerkung 13.6 (Das Volumen des Parallelotops)
Die Determinante wird auch eine *Volumenform* genannt, was sich durch die folgende geometrische Interpretation gerechtfertigt wird. Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ und sei

$$P\big(x_1, \ldots, x_n\big) := \big\{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, \ldots, n\big\}$$

das von den Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ aufgespannte *Parallelotop* (siehe Abbildung 1 / 2).

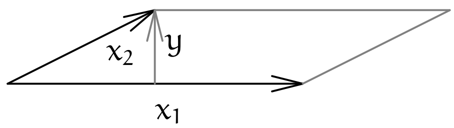

Abbildung 1. Das Parallelotop = Parallelogramm $P(x_1, x_2)$ in der Ebene

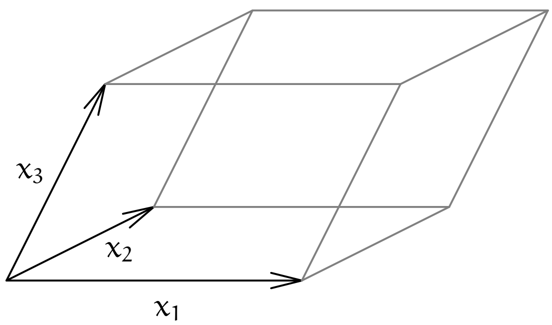

Abbildung 2. Das Parallelotop $P(x_1, x_2, x_3)$ im Raum

Dann definiert man das n-dimensionale Volumen von $P(x_1, \ldots, x_n)$ mit Hilfe der Determinante als

$$\text{Volumen}\,\big(P(x_1, \ldots, x_n)\big) = \left|\det\begin{pmatrix} x_1^t \\ \vdots \\ x_n^t \end{pmatrix}\right|$$

der Matrix, deren Zeilen die Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ sind.

In Dimension $n = 1$ ist $|\det(x_1)| = |x_1|$ in der Tat die Länge der Strecke von 0 nach x_1, und diese ist gerade $P(x_1)$. Auch in Dimension $n = 2$ und $n = 3$ kann man zeigen, daß das so definierte Volumen mit dem euklidischen Flächeninhalt bzw. mit dem euklidischen Volumen übereinstimmt, daß die Definition also sinnvoll ist.[2] Sie spielt im Rahmen der mehrdimensionalen Integrationstheorie und der Verallgemeinerung der Substitutionsregel eine wichtige Rolle spielen. □

II) Wichtige Rechenregeln für Determinanten

Lemma 13.7
Wenn eine Matrix eine Nullzeile enthält oder zwei gleiche Zeilen enthält, so ist ihre Determinante null.

Satz 13.8 (Die Determinante der Transponierten)
Für $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ *gilt:*

$$\det(A) = \det\left(A^t\right).$$

Bemerkung 13.9

a. Damit gelten für die Änderung der Determinante bei Anwendung von elementaren Spaltenoperationen die gleichen Regeln wie bei elementaren Zeilenoperationen, da durch Transponieren die Zeilen und die Spalten ihre Rolle tauschen.
b. In Bemerkung 13.6 kann man die Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ also auch als Spalten in eine Matrix schreiben, die Determinante ausrechnen und erhält so das Volumen des Parallelotops. Da die Vektoren Spaltenvektoren sind, ist das vielleicht naheliegender.

Beispiel 13.10
Es gilt

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 5 \cdot 3 - 6 \cdot 2 = 3$$

---

[2]Wenn wir den Winkel, der von den Vektoren x_1 und x_2 eingeschlossen wird, mit α bezeichnen, dann ist die Höhe des Parallelogramms die Länge des Vektors (siehe Abbildung 1

$$y = x_2 - \cos(\alpha) \cdot \frac{x_1}{|x_1|}.$$

Wegen Bedingung II haben die Matrizen mit den Zeilen x_1 und x_2 bzw. mit den Zeilen x_1 und y die gleiche Determinante. Zudem können wir die Länge der Vektoren wegen Bedingung I aus der Determinante ziehen und erhalten

$$\det\begin{pmatrix} x_1^t \\ x_2^t \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x_1^t \\ y^t \end{pmatrix} = |x_1| \cdot |y| \cdot \det\begin{pmatrix} \frac{x_1^t}{|x_1^t|} \\ \frac{y^t}{|y|} \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $|x_1|$ die Länge der Grundseite und $|y|$ die Länge der Höhe des Parallelogramms. Das Produkt der beiden ist der Flächeninhalt des Parallelogramms. Man muß also nur noch begründen, weshalb

$$\det\begin{pmatrix} \frac{x_1^t}{|x_1^t|} \\ \frac{y^t}{|y|} \end{pmatrix} = \pm 1$$

gilt. Der Grund dafür liegt darin, daß die Matrix *orthogonal* ist, daß heißt, die Zeilenvektoren stehen senkrecht aufeinander und haben Länge 1. Solche Matrizen haben stets Determinante ± 1.

und

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 6 = 3.$$

Beispiel 13.11

Sei $A \in \mathrm{Mat}(n+1, K)$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \dots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ziehe für $i = 1, \dots, n$ von der i-ten Zeile die $(i+1)$-te Zeile ab. Wir erhalten:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 1 \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Addiere nun für $i = 2, \dots, n+1$ die erste Spalte zur i-ten Spalte. Dann erhalten wir:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & -2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & * & -2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & * & * & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & * & * & * & \dots & -2 & 0 \\ * & * & * & * & \dots & * & n \end{pmatrix}.$$

Es folgt:

$$\det(A) = (-1) \cdot (-2)^{n-1} \cdot n = -n \cdot (-2)^{n-1}.$$

Satz 13.12 (Determinantenmultiplikationssatz)

Für Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ *gilt*

$$\det(A \circ B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Beispiel 13.13

In Beispiel 13.10 gilt

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}),$$

so folgt aus dem Determinantenmultiplikationssatz 13.12 und weil die beiden Matrizen auf der rechten Seite Dreiecksmatrizen sind:

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 = 3.$$

Definition 13.14
Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ heißt *invertierbar*, wenn es eine Matrix B mit $A \circ B = B \circ A = \mathbb{1}_n$ gilt, wobei die Matrix $\mathbb{1}_n$ die Diagonalmatrix mit nur Einsen auf der Diagonale ist. Wir schreiben dann $A^{-1} := B$ und nennen diese Matrix die *Inverse* von A.

Man beachte, daß die *Einheitsmatrix* $\mathbb{1}_n$ bei der Matrixmultiplikation ein neutrales Element ist, d.h. $A \circ \mathbb{1}_n = \mathbb{1}_n \circ A = A$. Die Matrix A^{-1} ist ein *Inverses* zu A bezüglich der Multiplikation (vgl. Satz 2.1). Das rechtfertigt die Bezeichnung.

Korollar 13.15 (Determinante und Invertierbarkeit)
$A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ *ist genau dann invertierbar, wenn* $\det(A) \neq 0$. *In diesem Fall gilt*

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Beweis: Wir wollen die Formel für die Determinante der Inversen beweisen. Sei also A invertierbar. Dann gilt

$$1 = \det(\mathbb{1}_n) = \det\left(A \circ A^{-1}\right) = \det(A) \cdot \det\left(A^{-1}\right).$$

Dies zeigt, daß $\det(A)$ nicht Null sein kann, und zudem ist damit die obige Formel bewiesen. □

Beispiel 13.16
Die Matrix A in Beispiel 13.13 ist invertierbar und ihre Inverse hat Determinante $\frac{1}{3}$. Dies wissen wir, ohne die Inverse zu kennen.

Satz 13.17 (Kästchensatz)
Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ *eine* Blockmatrix *der Form*

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$$

mit $B \in \mathrm{Mat}(k \times k, \mathbb{R})$, $C \in \mathrm{Mat}(k \times l, \mathbb{R})$, $D \in \mathrm{Mat}(l \times l, \mathbb{R})$, $0 \in \mathrm{Mat}(l \times k, \mathbb{R})$ *und* $n = k + l$. *Dann gilt:*

$$\det(A) = \det(B) \cdot \det(D).$$

Beispiel 13.18
In Beispiel 13.5 haben wir die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$$

berechnet. Mit Hilfe des Kästchensatzes und der allgemeinen Formel zur Berechnung der Determinante einer 2×2-Matrix sehen wir sofort

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = (1 \cdot 2 - 3 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2 - 1 \cdot 2) = (-4) \cdot 0 = 0.$$

Die Matrix ist also insbesondere nicht invertierbar.

Bemerkung 13.19
Die bisherigen Ausführungen für Determinanten gelten nicht nur für Matrizen mit Einträgen im Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, sondern sie gelten analog für Matrizen mit Einträgen in einem beliebigen Körper, z.B. $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{C}$. Insbesondere gelten sie für Matrizen mit Einträgen im Körper

$$\mathbb{R}(x) := \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; f, g \text{ Polynomfunktionen }, g \neq 0 \right\}$$

der rationalen Funktionen über $\mathbb{R}$! Diesen Umstand wollen wir uns im folgenden Unterabschnitt zu Nutze machen.

III) Eigenwerte

Definition 13.20 (Charakteristisches Polynom)
Für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ nennen wir die Determinante

$$\chi_A(x) := \det(x \cdot \mathbb{1}_n - A) \in \mathbb{R}(x)$$

das *charakteristische Polynom* von A,

$$x \cdot \mathbb{1}_n - A = \begin{pmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & x - a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine quadratische Matrix mit Polynomfunktionen als Einträgen ist.

Lemma 13.21
Das charakteristische Polynom einer $n \times n$-Matrix ist stets eine Polynomfunktion vom Grad n der Form

$$\chi_A = x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

wobei $a_0 = (-1)^n \cdot \det(A)$.

Beispiel 13.22
Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} x-5 & -2 \\ -6 & x-3 \end{pmatrix} = (x-5)\cdot(x-3) - (-2)\cdot(-6) = x^2 - 8x + 3.$$

Definition 13.23 (Eigenwerte)
Für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ nennen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A = \det(x \cdot \mathbb{1}_n - A)$ die *Eigenwerte* von A.

Beispiel 13.24
Betrachten wir zunächst die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{R}).$$

Wir fassen die Matrix $x\mathbb{1}_n - A \in \mathrm{Mat}\big(n \times n, \mathbb{R}(x)\big)$ als Matrix über dem Körper $\mathbb{R}(x)$ auf und berechnen die Determinante mit Hilfe des Gauß Algorithmus, der ebenfalls über jedem Körper funktioniert:

$$\begin{pmatrix} x & -1 & -1 \\ 1 & x-2 & -1 \\ 1 & -1 & x-2 \end{pmatrix} \xmapsto[\mathrm{III}\mapsto\mathrm{III}-\frac{1}{x}\mathrm{I}]{\mathrm{II}\mapsto\mathrm{II}-\frac{1}{x}\mathrm{I}} \begin{pmatrix} x & -1 & -1 \\ 0 & x-2+\frac{1}{x} & \frac{1}{x}-1 \\ 0 & \frac{1}{x}-1 & x-2+\frac{1}{x} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} x & -1 & -1 \\ 0 & \frac{(x-1)^2}{x} & -\frac{x-1}{x} \\ 0 & -\frac{x-1}{x} & \frac{(x-1)^2}{x} \end{pmatrix} \xmapsto{\mathrm{III}\mapsto\mathrm{III}+\frac{1}{x-1}\mathrm{II}} \begin{pmatrix} x & -1 & -1 \\ 0 & \frac{(x-1)^2}{x} & -\frac{x-1}{x} \\ 0 & 0 & x-2 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Entsprechend erhalten wir für das charakteristische Polynom

$$\chi_A = x \cdot \tfrac{(x-1)^2}{x} \cdot (x-2) = (x-1)^2 \cdot (x-2).$$

Das charakteristische Polynom hat also die Nullstellen $\lambda = 1$ und $\lambda = 2$, wobei $\lambda = 1$ eine zweifache Nullstelle ist. Insbesondere ist also $\sigma(A) = \{1, 2\}$.

Bemerkung 13.25
Die obige Definition des Begriffes Eigenwert verschleiert seine geometrische Bedeutung vollkommen. Die Kürze der Zeit im Vorkurs erlaubt es aber nicht, hier näher darauf einzugehen. Wir haben deshalb eine Definition gewählt, die uns möglichst rasch ein Kriterium für die Extremstellen im Mehrdimensionalen formulieren läßt.

Definition 13.26
Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ heißt *symmetrisch*, wenn $A = A^t$ gilt, d.h. die Einträge der Matrix sind spiegelsymmetrisch bezüglich der Diagonalen.

Beispiel 13.27
Die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$$
ist symmetrisch.

Der folgende Satz sagt zunächst aus, daß Polynomfunktionen, die als charakteristisches Polynom einer symmetrischen Matrix entstehen, besonders gut sind. Der Fundamentalsatz der Algebra garantiert uns, daß die Funktion über den komplexen Zahlen n Nullstellen besitzt, wenn man sie mit Vielfachheit zählt. In der Tat sind diese Nullstellen aber alle reelle Zahlen, was eine bemerkenswerte Besonderheit ist, die uns noch von großem Nutzen sein wird.

Satz 13.28
Das charateristische Polynom einer symmetrischen Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ *zerfällt über* $\mathbb{R}$ *in Linearfaktoren, d.h.*
$$\chi_A = (x - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_n)$$
für geeignete reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Beispiel 13.29
Die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$$
ist symmetrisch. Mit dem Kästchensatz können wir das charakteristische Polynom von A berechnen als
$$\begin{aligned} \chi_A =& \det \begin{pmatrix} x-3 & -3 & 0 \\ -3 & x-3 & 0 \\ 0 & 0 & x-6 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} x-3 & -3 \\ -3 & x-3 \end{pmatrix} \cdot (x-6) \\ =& \big((x-3)^2 - 9\big) \cdot (x-6) = (x^2 - 6x) \cdot (x-6) = x \cdot (x-6)^2. \end{aligned}$$
Das charakteristische Polynom von A zerfällt also über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren und die Eigenwerte von A sind 0 und 6, wobei 6 doppelte Vielfachheit hat.

Definition 13.30
Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix.

a. A heißt *positiv definit*, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.

b. A heißt *negativ definit*, wenn alle Eigenwerte von A negativ sind.

c. A heißt *indefinit*, wenn es einen positiven und einen negativen Eigenwert gibt.

d. Entsteht die $k \times k$-Untermatrix $A(k)$ von A durch Streichen der letzten $n - k$ Zeilen und Spalten, so nennen wir $A(k)$ die k-te *Hauptmatrix* von A und $\det\big(A(k)\big)$ den k-ten *Hauptminor* von A.

Satz 13.31 (Hurwitz-Kriterium für positive Definitheit)
Für eine symmetrische $A \in \mathrm{Mat}_n(n \times n, \mathbb{R})$ *sind folgenden Aussage gleichwertig:*

a. A *ist positiv definit.*

b. *Alle Hauptminoren von* A *sind positiv.*

c. $x^t \circ A \circ x > 0$ *für alle* $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$.

Beispiel 13.32
Betrachten wir die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R}),$$

so gilt

$$\det(A(1)) = \det(1) = 1 > 0$$

und

$$\det(A(2)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 1 > 0$$

und wegen des Kästchensatzes dann auch

$$\det(A(3)) = \det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot 1 = 1 > 0.$$

Die Matrix ist also positiv definit.

Aufgabe 13.33
Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 23 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 13.34
Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren $x = (1, 3)^t$ und $y = (2, -4)^t$ in der Ebene aufgespannt wird.

Aufgabe 13.35
Überprüfe, welche der folgenden Matrizen invertierbar ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 13.36
Berechne das charakteristische Polynom für die Matrizen in Aufgabe 13.35.