§ 11 Spezielle Funktionen und ihre Eigenschaften

In diesem Abschnitt wollen wir wichtige Eigenschaften der allgemeinen Exponential- und Logarithmusfunktion sowie einiger trigonometrischer Funktionen zusammenstellen.

I) Die Exponentialfunktion zur Basis a

Definition 11.1
Für eine positive reelle Zahl $1 \neq a \in (0, \infty)$ definieren wir die *Exponentialfunktion zur Basis* a als

$$\exp_a : (-\infty, \infty) \longrightarrow (0, \infty) : x \mapsto \exp(x \cdot \ln(a)) = e^{x \cdot \ln(a)}.$$

Wir schreiben dann auch

$$a^x := \exp_a(x).$$

Bemerkung 11.2
Die Exponentialfunktion zur Basis e ist damit die altbekannte Exponentialfunktion, d.h.

$$\exp_e(x) = \exp(x),$$

wenn e die Eulersche Zahl ist. Die im folgenden aufgelisteten Eigenschaften der Exponentialfunktion zur Basis a gelten damit insbesondere für die altbekannte Exponentialfunktion.

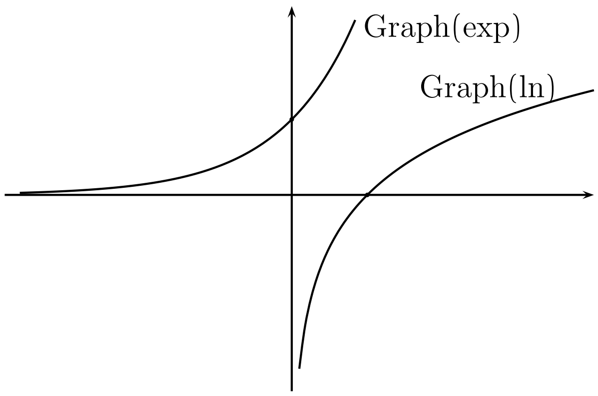

Abbildung 15. Die Graphen der Exponentialfunktion und des Logarithmus zur Basis e

Für natürliche und rationale Zahlen x haben wir bereits eine Definition für den Ausdruck a^x kennen gelernt. Die neue Definition liefert dabei dasselbe Ergebnis.

Satz 11.3 (Eigenschaften der Exponentialfunktionen)
Die Exponentialfunktion zur Basis a *ist differenzierbar auf* $\mathbb{R}$ *und*

- *für* $a > 1$ *ist sie streng monoton wachsend,*
- *für* $a < 1$ *ist sie streng monoton fallend.*

Ferner gelten die folgenden Gesetzmäßigkeiten und Regeln:

$\lim\limits_{x\to\infty} \exp_a(x) = \begin{cases} \infty, & \text{für } a > 1, \\ 0, & \text{für } a < 1. \end{cases}$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \exp_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } a > 1, \\ \infty, & \text{für } a < 1. \end{cases}$
$\exp_a'(x) = \ln(a) \cdot \exp_a(x)$	$\int^y \exp_a(x)\, dx = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \exp_a(y)$
$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$	$a^{x \cdot y} = (a^x)^y$
$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$	$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

II) Der Logarithmus zur Basis a

Definition 11.4
Die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion $\exp_a$, die nach dem Satz über die Umkehrfunktion 8.19 existiert, wird *Logarithmus zur Basis* a genannt:

$$\log_a : (0, \infty) \longrightarrow (-\infty, \infty).$$

Bemerkung 11.5
Der Logarithmus zur zur Basis e ist damit der Logarithmus naturalis, d.h.

$$\log_e(x) = \ln(x),$$

wenn e die Eulersche Zahl ist. Die im folgenden aufgelisteten Eigenschaften des Logarithmus zur Basis a gelten damit insbesondere für den Logarithmus naturalis.

Satz 11.6 (Eigenschaften des Logarithmus)
Der Logarithmus zur Basis a *ist differenzierbar auf* $(0, \infty)$ *und*

- *für* $a > 1$ *ist sie streng monoton wachsend,*
- *für* $a < 1$ *ist sie streng monoton fallend.*

Ferner gelten die folgenden Gesetzmäßigkeiten und Regeln:

$\lim\limits_{x\to\infty} \log_a(x) = \begin{cases} \infty, & \text{für } a > 1, \\ -\infty, & \text{für } a < 1. \end{cases}$	$\lim\limits_{x\to 0} \log_a(x) = \begin{cases} -\infty, & \text{für } a > 1, \\ \infty, & \text{für } a < 1. \end{cases}$
$\log_a'(x) = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$	
$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$	$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
$\log_a(x^z) = z \cdot \log_a(x)$	$\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$

III) Trigonometrische Funktionen

Satz 11.7 (Eigenschaften des Sinus und Cosinus)
Der Sinus und der Cosinus sind differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$. Der Sinus

$$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

ist streng monoton wachsend auf $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. *Der Cosinus*

$$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

ist streng monoton fallend auf $[0,\pi]$.

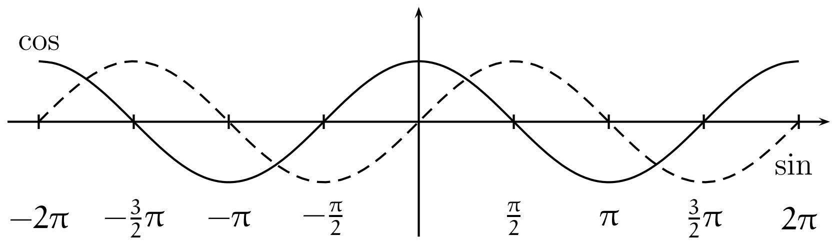

Abbildung 16. Die Graphen des Sinus und des Cosinus

In der folgenden Tabelle sind einige spezielle Funktionswerte festgehalten:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\cdot\pi}{2}$	2π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	-1	0	1

Darüberhinaus gelten die folgenden Gesetzmäßigkeiten und Rechenregeln:

Ableitungen	$\sin'(x) = \cos(x), \quad \cos'(x) = -\sin(x)$
Stammfunktionen	$\int^y \sin(x)\ dx = -\cos(y), \quad \int^y \cos(x)\ dx = \sin(y)$
Additionstheorem des Cosinus	$\cos(x+y) = \cos(x)\cdot\cos(y) - \sin(x)\cdot\sin(y)$
Additionstheorm des Sinus	$\sin(x+y) = \cos(x)\cdot\sin(y) + \sin(x)\cdot\cos(y)$
Cosinus ist eine gerade Funktion	$\cos(x) = \cos(-x)$
Sinus ist eine ungerade Funktion	$\sin(x) = -\sin(-x)$
Satz des Pythagoras	$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$

Nullstellen des Cosinus	$\ldots, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$
Nullstellen des Sinus	$\ldots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$
Cosinus und Sinus sind 2π-periodisch	$\cos(x+2\pi) = \cos(x), \quad \sin(x+2\pi) = \sin(x)$
Periodenverschiebung um $\frac{\pi}{2}$	$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x), \quad \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$

Definition 11.8 (Tangens und Cotangens)
Die Funktion

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

heißt *Tangens* und die Funktion

$$\cot : \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

heißt *Cotangens.*

Satz 11.9
Der Tangens ist auf dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ differenzierbar und streng monoton wachsend, der Cotangens ist auf dem Intervall $[0, \pi]$ differenzierbar und streng monoton fallend. Die Graphen beider Funktionen sind punktsymmetrisch zu den Nullstellen.

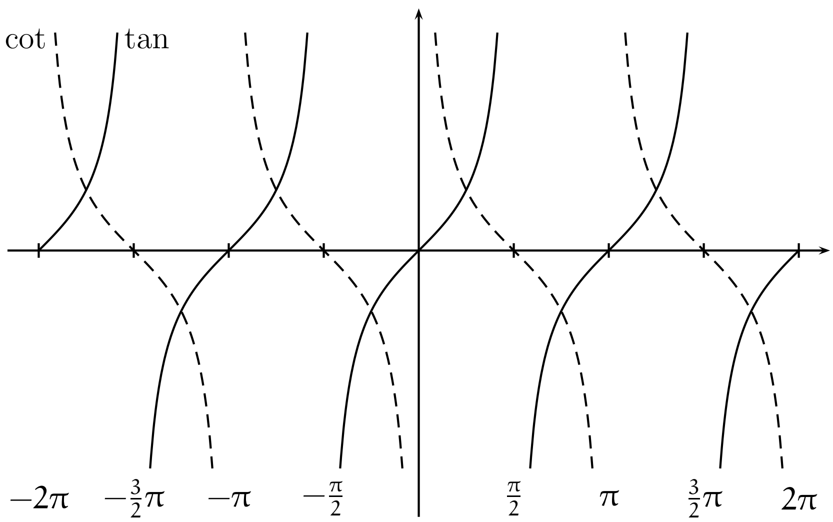

Abbildung 17. Tangens und Cotangens

Darüberhinaus gelten die folgenden Gesetzmäßigkeiten und Rechenregeln:

Ableitungen	$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$,

	$\cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$
Tangens und Cotangens sind ungerade Funktionen	$\tan(x) = -\tan(-x)$ $\cot(x) = -\cot(-x)$
Nullstellen des Tangens	$\ldots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$
Nullstellen des Cotanges	$\ldots, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$
Tangens und Cotangens sind π*-periodisch*	$\tan(x+\pi) = \tan(x)$ $\cot(x+\pi) = \cot(x)$

Satz 11.10 (Arcusfunktionen)

a. *Die Funktion* $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$ *besitzt eine differenzierbare, streng monoton wachsende Umkehrabbildung, die wir* Arcussinus *nennen,*

$$\arcsin : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

b. *Die Funktion* $\cos : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$ *besitzt eine differenzierbare, streng monoton fallende Umkehrabbildung, die wir* Arcuscosinus *nennen,*

$$\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi].$$

c. *Die Funktion* $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ *besitzt eine differenzierbare, streng monoton wachsende Umkehrabbildung, die wir* Arcustangens *nennen,*

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

d. *Die Funktion* $\cot : (0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ *besitzt eine differenzierbare, streng monoton fallende Umkehrabbildung, die wir* Arcuscotangens *nennen,*

$$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\pi).$$

Für die Ableitungen der Funktionen gelten die folgenden Regeln:

$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccot}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Aufgabe 11.11

Zeige, die folgenden Gleichungen für den Sinus und Cosinus:

$$\sin(x+\pi) = -\sin(x) \quad \text{und} \quad \cos(x+\pi) = -\cos(x).$$

Aufgabe 11.12
Rechne möglichst viele der in diesem Abschnitt angegebenen Eigenschaften der Exponentialfunktionen, des Logarithmus sowie der trigonometrischen Funktionen nach. Dabei dürfen neben ihren Definitionen auch die Ergebnisse früherer Kapitel sowie früherer Aufgaben verwendet werden.

Aufgabe 11.13
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $f(1) = a > 0$. Zeige, dann ist $f = \exp_a$.

Aufgabe 11.14 (Additionstheoreme für Tangens und Arcustangens)

a. Zeige das folgende Additionstheorem für den Tangens:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)},$$

wobei $x, y, x+y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ gelten soll.

b. Folgere daraus das folgende Additionstheorem für den Arcustangens:

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

c. Zeige die Gleichung

$$4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}.$$