e. Für zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gelten die *Additionstheoreme*

$$\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$$

und

$$\sin(x+y) = \cos(x) \cdot \sin(y) + \sin(x) \cdot \cos(y).$$

f. Für eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt $|e^{ix}| = 1$.

§ 8 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

In diesem Abschnitt sei I stets ein offenes, halboffenes oder abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$, und $\overline{I}$ bezeichne das zugehörige abgeschlossene Intervall.

I) Grenzwerte von Funktionen

Im vorliegenden Paragraphen beschäftigen wir uns im wesentlichen mit der Frage, wie sich die Funktionswerte $f(x)$ einer Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ verhalten, wenn sich das Argument x einem festgelegten Wert a im Definitionsbereich I nähert. Im Idealfall nähern sie sich dem Funktionswert $f(a)$ der Funktion f im Punkt a, und man sagt, daß die Funktion *stetig* in a ist.

Um all dies sauber einführen zu können, müssen wir aber zunächst klären, was es heißt, daß sich der Funktionswert $f(x)$ einem Wert y nähert. Dies führt zum Begriff des Grenzwertes einer Funktion.

Definition 8.1 (Grenzwert einer Funktion)
Es sei $a \in \overline{I}$ und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion.

Wir nennen $y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ einen *Grenzwert* der Funktion f in a, wenn für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $I \setminus \{a\}$ mit $a_n \longrightarrow a$ auch $f(a_n) \longrightarrow y$ gilt.

Wir schreiben dann

$$y = \lim_{x\to a} f(x).$$

Die Werte $y = \infty$ und $y = -\infty$ nennt man wie bei Folgen *uneigentliche Grenzwerte.*

Beispiel 8.2

a. Betrachte $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ und $a = 3$. Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \longrightarrow 3$ gilt dann wegen der Grenzwertsätze für Folgen 7.8

$$f(a_n) = a_n^2 = a_n \cdot a_n \longrightarrow 3 \cdot 3 = 9.$$

Mithin ist 9 der Grenzwert von f in 3, d.h.

$$\lim_{x\to 3} x^2 = 9 = f(3).$$

b. Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

und $a = 0$. Ist nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \longrightarrow 0$ und $a_n \neq 0$, dann gilt

$$f(a_n) = 1 \longrightarrow 1.$$

Mithin ist 1 der Grenzwert von f in 0, d.h.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0).$$

c. Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0, \\ 1, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

und $a = 0$. Dann gilt für $a_n := -\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ und $f(a_n) = 0 \longrightarrow 0$ sowie $b_n := \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ und $f(b_n) = 1 \longrightarrow 1$. Mithin existiert der Grenzwert von f in $a = 0$ nicht.

d. Für die Funktion $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ (siehe Abbildung 3) gilt

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty.$$

Zudem ist $(0, \infty)$ nach oben unbeschränkt und

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

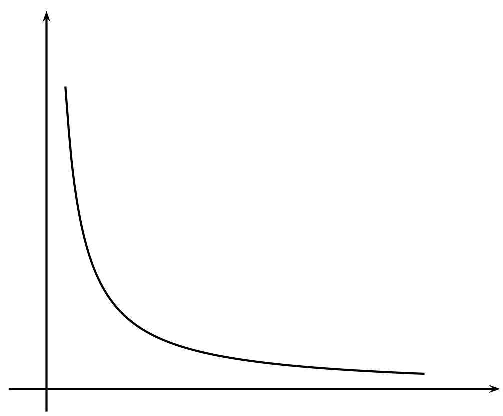

Abbildung 3. Graph der Funktion $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$

Beispiel 8.3

Es sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$ eine Polynomfunktion vom Grad $n \geq 1$. Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } a_n > 0, \\ -\infty, & \text{falls } a_n < 0, \end{cases}$$

und

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } (a_n > 0 \text{ und } n \text{ gerade }) \text{ oder } (a_n < 0 \text{ und } n \text{ ungerade}), \\ -\infty, & \text{falls } (a_n < 0 \text{ und } n \text{ gerade }) \text{ oder } (a_n > 0 \text{ und } n \text{ ungerade}). \end{cases}$$

Das liegt daran, daß für betragsmäßig sehr große Werte von x der Summand $a_n x^n$ den Wert der Summe dominiert.

Zudem folgt aus den Grenzwertsätzen für Folgen unmittelbar für jeden Wert $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Aus den Grenzwertsätzen für Folgen leiten sich zudem unmittelbar die Grenzwertsätze für Funktionen ab.

Satz 8.4 (Grenzwertsätze für Funktionen)
Seien $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *und* $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *zwei Funktionen,* $a \in \overline{I}$ *und* $c \in \mathbb{R}$.

a. *Der Grenzwert von* f *in* a *ist eindeutig bestimmt, d.h. falls* $\lim_{x\to a} f(x) = y$ *und* $\lim_{x\to a} f(x) = z$*, so ist* $y = z$.
b. *Wenn* $\lim_{x\to a} f(x)$ *und* $\lim_{x\to a} g(x)$ *existieren, so gelten:*
   (i) $\lim_{x\to a}(c \cdot f)(x) = c \cdot \lim_{x\to a} f(x)$.
   (ii) $\lim_{x\to a}(f + g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$.
   (iii) $\lim_{x\to a}(f - g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$.
   (iv) $\lim_{x\to a}(f \cdot g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$.
c. *Falls zudem* $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$*, so gilt* $\lim_{x\to a} \frac{1}{f}(x) = \frac{1}{\lim_{x\to a} f(x)}$.

II) Stetigkeit von Funktionen

Bemerkung 8.5 (Stetigkeit)
In der Schule nennt man eine Funktion gemeinhin stetig, *wenn man den Graphen durchzeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen.* Aber was genau heißt das eigentlich, wo es doch viele schöne Funktionen wie etwa

$$f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

gibt, deren Graphen wir niemals wirklich zeichnen können?[10]

Die obige Merkregel ist die graphische Interpretation der Bedingung, daß sich der Funktionswert $f(x)$ dem Wert $f(a)$ annähert, wenn x sich a annähert, d.h.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

daß also $f(a)$ der Grenzwert der Funktion f im Punkt a ist.

[10] Bei dem angegebenen Beispiel wackelt der Graph unendlich oft zwischen den Werten 1 und -1 hin und her, wenn man sich der Null nähert.

Definition 8.6 (Stetigkeit)

Eine Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig in $a \in I$, wenn $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Die Funktion f heißt *stetig* (auf I), wenn sie stetig in jedem Punkt in I ist.

Bemerkung 8.7
Man kann die Stetigkeit auch direkt mittels Folgen charakterisieren:

f ist genau dann *stetig in* a, wenn für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in I mit $a_n \longrightarrow a$ auch $f(a_n) \longrightarrow f(a)$ gilt.

Für stetige Funktionen gilt mithin, daß die Anwendung der Funktion mit der Grenzwertbildung kommutiert:

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \to \infty} a_n\right). \tag{10}$$

Wir werden im Verlauf der Vorlesung noch andere Situationen kennenlernen, bei denen eine Grenzwertbildung mit bestimmten anderen Operationen vertauscht. Dies sind immer sehr besondere Ausnahmesituationen, die man würdigen sollte!

In der Gleichung (10) drückt sich auch die folgende wichtige Vorstellung aus:

Kleine Änderungen der Argumente führen bei stetigen Funktionen nur zu kleinen Änderungen der Funktionswerte!

Denn $f(a_n)$ wird nahe bei $f(a)$ liegen, wenn n nur hinreichend groß ist, d.h. wenn a_n nur hinreichend nahe bei a liegt.

Bemerkung 8.8

a. Jede Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.
Denn nach Beispiel 8.3 gilt für $a \in \mathbb{R}$ auch $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

b. Analog ist jede rationale Funktion $\frac{f}{g} : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.

c. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

aus Beispiel 8.2 b. ist nicht stetig in 0, da $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$. Aber, f ist stetig in jedem $a \neq 0$, wie man leicht sieht.

d. Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ ist stetig (siehe Abbildung 4).
Denn für $a \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \longrightarrow a$ gilt aufgrund der Grenzwertsätze für Folgen 7.8 auch $|a_n| \longrightarrow |a|$.

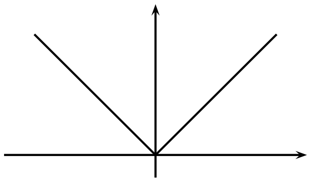

Abbildung 4. Der Graph der Betragsfunktion

e. Die Exponentialfunktion, der Sinus und der Cosinus sind stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$. Allgemeiner sind Funktionen stetig, die wie diese durch Reihen definiert werden.

Satz 8.9 (Rechenregeln für stetige Funktionen)
Seien $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *und* $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *Funktionen, die in* $a \in I$ *stetig sind, und* $c \in \mathbb{R}$.

a. $c \cdot f$, $f + g$, $f - g$ *und* $f \cdot g$ *sind stetig in* a.
b. *Ist* $g(a) \neq 0$, *so ist auch* $\frac{f}{g} : I \setminus \{x \in I \mid g(x) = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig in* a.

Bislang haben wir den Begriff der *Komposition* oder Hintereinanderausführung von Funktionen vermieden. Wir verweisen für die Definition und erste Beispiele auf Anhang C. Die Menge

$$\mathrm{Im}(f) := \{f(x) \mid x \in I\}$$

der Funktionswerte einer Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ wird auch ihr *Bild* genannt.

Satz 8.10 (Komposition stetiger Funktionen)
Es seien $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *und* $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *Funktionen mit* $\mathrm{Im}(f) \subseteq J$ *und es sei* $a \in I$. *Ist* f *stetig in* a *und* g *stetig in* $f(a)$, *so ist* $g \circ f$ *stetig in* a.

Beispiel 8.11
Ist $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in $a \in I$, so ist auch $|f| : I \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |f(x)|$ als Komposition stetiger Funktionen stetig in a.

III) Wichtige Eigenschaften stetiger Funktionen

Der Zwischenwertsatz ist naheliegend, wenn der Graph einer stetigen Funktion gezeichnet werden kann, ohne den Stift abzusetzen.

Satz 8.12 (Zwischenwertsatz)
Eine stetige Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *nimmt jeden Wert zwischen* $f(a)$ *und* $f(b)$ *an.*

Beispiel 8.13 (Nullstellen von Polynomfunktionen)
Eine Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ von ungeradem Grad besitzt eine Nullstelle.

Denn nach Beispiel 8.3 gilt, daß $\lim_{x \to \infty} f(x)$ und $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ verschiedene Vorzeichen haben, so daß es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ geben muß. Wenden wir dann den Zwischenwertsatz auf $f_{|[a,b]}$ bzw. $f_{|[b,a]}$ an, so folgt die Behauptung.

Satz 8.14 (Maximum / Minimum stetiger Funktionen)
Eine stetige Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *nimmt ihr Maximum und ihr Minimum an,*

d.h. es gibt $c, d \in [a, b]$*, so daß für alle* $x \in [a, b]$ *gilt*

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

Beispiel 8.15

a. Die Funktion $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ ist beschränkt, und es gilt $f(0) = 0$ ist das Minimum und $f(1) = f(-1) = 1$ ist das Maximum von $\mathrm{Im}(f)$.

b. Die Funktion $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ ist nicht beschränkt und nimmt weder ihr Minimum noch ihr Maximum an.

Definition 8.16 (Monotone Funktionen)
Eine Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *streng monoton wachsend*, wenn für $x, y \in I$ aus $x < y$ stets $f(x) < f(y)$ folgt. *Streng monoton fallend* definiert man analog.

Definition 8.17 (Umkehrfunktion)
Eine Funktion $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Umkehrfunktion der Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, wenn $g(f(x)) = x$ und $f(g(y)) = y$ für alle $x \in I$ und alle $y \in J$ gilt. Wir schreiben dann $f^{-1} := g$.

Bemerkung 8.18 (Umkehrfunktion)
In Anhang C wird der Begriff der Umkehrabbildung und der damit zusammenhängende Begriff der Bijektivität ausführlich behandelt. Wir wollen hier nur auf einige Aspekte eingehen, die z.T. speziell für Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sind.

a. Man beachte zunächst, daß mit f^{-1} hier *nicht* $\frac{1}{f}$ gemeint ist!

b. Die meisten Funktionen besitzen keine Umkehrfunktionen! Satz 8.19 gibt ein mögliches hinreichendes Kriterium für die Existenz einer Umkehrfunktion.

c. Wenn eine Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Umkehrfunktion besitzt, erhält man ihren Graphen, indem man den Graphen von f an der Winkelhalbierenden $\{y = x\}$ spiegelt. Das liegt daran, daß beim Umkehren der Funktion die Rollen der Argumente x und der Funktionswerte y vertauscht werden. (Siehe z.B. Abbildung 5.)

Satz 8.19 (Umkehrsatz für streng monotone stetige Funktionen)
Ist $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *streng monoton wachsend und stetig, so besitzt* f *eine Umkehrfunktion* f^{-1} *und diese ist ebenfalls streng monoton wachsend und stetig.*[11]

Beispiel 8.20 (Wurzelfunktionen)
Die Funktion $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^n$ ist für jedes $n \geq 1$ streng monoton wachsend, da aus $0 \leq x < y$ stets $x^n < y^n$ folgt. Mithin ist die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty) : x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

ebenfalls stetig und streng monoton wachsend.

[11] Die entsprechende Aussage für streng monoton fallende stetige Funktionen gilt analog.

Beispiel 8.21 (Die Exponentialfunktion)
Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend. Mithin ist die Umkehrfunktion

$$\ln : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},$$

die Logarithmusfunktion, ebenfalls stetig und streng monoton wachsend.

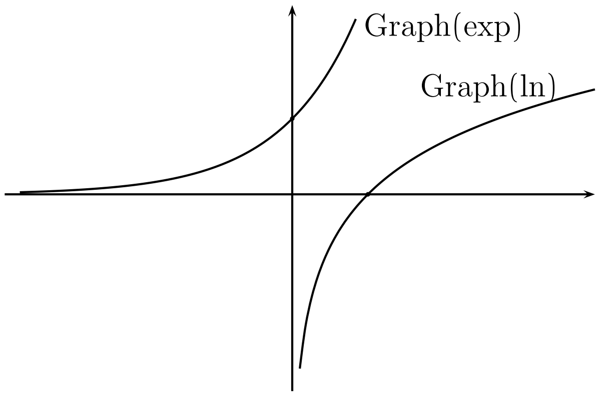

Abbildung 5. Die Exponential- und die Logarithmusfunktion

Um zu sehen, daß die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist, beachten wir, daß für positive Werte $z > 0$ stets

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} > 1$$

gilt. Für $x < y$ gilt dann

$$\exp(x) = \exp(x) \cdot 1 < \exp(x) \cdot \exp(y - x) = \exp(x + y - x) = \exp(y).$$

Aufgabe 8.22
Bestimme den größtmöglichen Definitionsbereich D von $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit:

a. $f(x) = \frac{x+\frac{1}{x}}{x}$.
b. $f(x) = \frac{x^2+3x-+2}{x^2+x-2}$.

Welche Werte kann die Funktion annehmen, d.h. was ist das Bild der Funktion?

Aufgabe 8.23
Berechne die folgenden Grenzwerte:

a. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2}$.
b. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{7x+3}{2x+1}$.
c. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$.
d. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$.