

## KAPITEL I

### Zahlbereiche

In diesem Kapitel werden zunächst die aus der Schule bekannten Zahlbereiche der natürlichen, der ganzen, der rationalen und der reellen Zahlen von einem etwas höheren Standpunkt aus betrachtet. Dabei werden viele Eigenschaften, die wohlbekannt sind, nochmals systematisch zusammen gestellt und näher beleuchtet. Danach werden wir den Zahlbereich der komplexen Zahlen einführen, der für Anwendungen insbesondere in der Elektrotechnik und der Physik wichtig ist und der meist aus der Schule nicht bekannt ist.

#### § 1 Die natürlichen, die ganzen, die rationalen und die reellen Zahlen

Wir werden in diesem Abschnitt zunächst die aus der Schule bekannten Zahlbereiche in Erinnerung rufen und ihre wichtigsten Rechenregeln und Eigenschaften zusammenstellen.

##### Definition 1.1

Wir setzen die folgenden Zahlbereiche als bekannt voraus.

- a. Die Menge

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

heißt die Menge der *natürlichen Zahlen*.

- b. Die Menge

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

heißt die Menge der *ganzen Zahlen*.

- c. Die Menge

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

heißt die Menge der *rationalen Zahlen*.

- d. Die Menge

$\mathbb{R} :=$  die Menge aller Dezimalbrüche

$$\begin{aligned} &= \{ a_{-n} a_{-(n-1)} \dots a_0, a_1 a_2 a_3 \dots \mid a_i \in \{0, 1, \dots, 9\} \text{ für alle } i, n \geq 0 \} \\ &= \left\{ \sum_{i=-n}^{\infty} a_i \cdot 10^{-i} \mid a_i \in \{0, 1, \dots, 9\} \text{ für alle } i, n \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

heißt die Menge der *reellen Zahlen*.

**Bemerkung 1.2**

Man beachte, daß die Darstellung einer rationalen Zahl als Bruch bzw. einer reellen Zahl als Dezimalzahl nicht eindeutig ist!

- a. Zwei rationale Zahlen  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{c}{d}$  sind genau dann gleich, wenn

$$a \cdot d = b \cdot c$$

gilt. Z.B.:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-4}{-8}.$$

Man kann die Darstellung eindeutig machen, indem man für  $\frac{a}{b}$  fordert, daß  $a$  und  $b$  teilerfremd sind und daß  $b$  positiv ist. Das soll uns aber nicht weiter beschäftigen. Wir können mit der Uneindeutigkeit gut leben.

- b. Die einzige Uneindeutigkeit bei Dezimalbrüchen besteht darin, daß man “9-Periode” aufrunden darf, ohne daß die Zahl sich ändert. D.h. es gilt stets

$$\dots a_k 999999 \dots = \dots (a_k + 1) 000000 \dots,$$

wenn  $a_k \in \{0, 1, \dots, 8\}$  gilt. Z.B.

$$2, 35999999 \dots = 2, 3600000 \dots$$

**§ 2 Wichtige Rechenregeln und Eigenschaften der reellen Zahlen**

Von der Schule her kennen wir für die reellen Zahlen vier Grundrechenarten:

- die Addition,
- die Subtraktion,
- die Multiplikation und
- die Division.

In der Mathematik hat es sich als sinnvoll erwiesen, nur die beiden Operationen *Addition* und *Multiplikation* als eigenständige Operationen zu betrachten, und die anderen beiden als Addition bzw. Multiplikation mit geeigneten anderen Zahlen aufzufassen. Dadurch reduziert sich die Anzahl an Rechenregeln, die man sich merken muß, erheblich!

**Satz 2.1** (Die Körperaxiome der reellen Zahlen)

Auf der Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen sind zwei Operationen definiert, die Addition  $+$  und die Multiplikation  $\cdot$ .

- a. Für die Addition gelten die folgenden Axiome:

(A1) Das Assoziativgesetz der Addition: für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}$  gilt:

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

(A2) Das Kommutativgesetz der Addition: für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

$$x + y = y + x.$$

(A3) Die Zahl  $0$  ist ein neutrales Element der Addition, d.h. für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$0 + x = x + 0 = x.$$

(A4) Zu jeder Zahl  $x \in \mathbb{R}$  gibt es ihr Negatives  $-x \in \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

b. Für die Multiplikation gelten die folgenden Axiome:

(M1) Das Assoziativgesetz der Multiplikation: für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}$  gilt:

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

(M2) Das Kommutativgesetz der Multiplikation: für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

(M3) Die Zahl  $1$  ist ein neutrales Element der Multiplikation, d.h. für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$0 \cdot x = x \cdot 1 = x.$$

(M4) Zu jeder Zahl  $0 \neq x \in \mathbb{R}$  gibt es ihr Inverses  $x^{-1} = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

c. (DG) Für die Addition und die Multiplikation gelten die Distributivgesetze, d.h. für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}$  gelten

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

und

$$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x.$$

### Bemerkung 2.2 (Körperaxiome)

Bevor wir weitere Rechenregeln betrachten, sind einige Anmerkungen zu den obigen Körperaxiomen angebracht.

a. Aus der Schule sind die Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetze meist schon mit diesen Namen bekannt. Ihre Aussagen sind für uns so selbstverständlich geworden, daß sie kaum mehr der Erwähnung wert scheinen:

**Assoziativgesetze:** Wir dürfen beim Addieren bzw. beim Multiplizieren Klammern umsetzen oder auch einfach weglassen.

**Kommutativgesetze:** Wir dürfen beim Addieren bzw. beim Multiplizieren die Reihenfolge der Summanden bzw. der Faktoren vertauschen.

**Distributivgesetze:** Sie regeln, wie sich Multiplikation und Addition zueinander verhalten, man sagt auch, sie regeln, was beim Auflösen der Klammern passiert.

b. Die Aussagen zur  $0$  und  $1$  als *neutralen Elementen* der Addition bzw. der Multiplikation scheinen auf den ersten Blick gänzlich überflüssig; sagen sie doch nur, daß die beiden *nichts* tun. Aber gerade die Tatsache, daß es solche Zahlen

gibt, die bei der Operation nichts ändern, ist für das Arbeiten mit den reellen Zahlen von enormer Bedeutung. — Die Einführung der Zahl 0 durch die Araber zählt zu einer der ganz großen Leistungen in der Mathematik des Mittelalters, ohne die viele weitere Entwicklungen schlicht unmöglich gewesen wären!

- c. Das Axiom (A4) dient dazu, die *Subtraktion* einer Zahl  $x$  einzuführen als Addition mit einer geeigneten anderen Zahl  $-x$ , ihrem Negativen. Alle Gesetze, die wir im folgenden für die Addition formulieren, gelten damit automatisch analog für die Subtraktion. — Man beachte, daß das Negative einer Zahl  $x$  dadurch charakterisiert wird, daß die Addition zu  $x$  den Wert 0 ergibt! Schon diese Charakterisierung ist nur möglich, weil wir die schöne Zahl 0 haben, die nichts tut.
- d. Das Axiom (M4) dient analog dazu, die *Division* einer Zahl  $x$  einzuführen als Multiplikation mit einer geeigneten anderen Zahl  $x^{-1}$ , ihrem Inversen. Alle Gesetze, die wir im folgenden für die Multiplikation formulieren, gelten damit automatisch wieder analog für die Division. — Man beachte, daß das Inverse einer Zahl  $x$  wieder dadurch charakterisiert wird, daß die Multiplikation mit  $x$  den Wert 1 ergibt! Wir verwenden hier also zur Charakterisierung die Existenz der Zahl, die bei der Multiplikation nichts tut.
- e. Man beachte auch, daß wir die Existenz eines Inversen der Multiplikation nicht für die Zahl 0 fordern, was der Erfahrung entspricht, daß man durch 0 nicht dividieren darf. Wir machen uns weiter unten die Mühe, *zu beweisen*, daß 0 nur dann ein Inverses der Multiplikation besitzen könnte, 0 die *einzigste* reelle Zahl wäre. Weshalb ist das so?

**Behauptung:** Besäße 0 ein Inverses  $0^{-1}$ , so wäre 0 die einzige reelle Zahl.

**Beweis:** <sup>1</sup> Wir nehmen also an, daß 0 ein Inverses  $0^{-1} \in \mathbb{R}$  besitzt mit der Eigenschaft

$$0 \cdot 0^{-1} = 1. \quad (1)$$

Sei nun  $x \in \mathbb{R}$  eine beliebige reelle Zahl. Wir wollen zeigen, daß  $x = 0$  gilt.

Dazu zeigen wir zunächst, daß für jede reelle Zahl  $y \in \mathbb{R}$  auf alle Fälle

$$0 \cdot y = 0 \quad (2)$$

---

<sup>1</sup>Man beachte, daß alle Schlußfolgerungen im Beweis korrekt sind, daß die *Aussage*, 0 sei die einzige reelle Zahl, aber dennoch falsch ist. Das liegt daran, daß die Voraussetzung, mit der wir starten, bereits falsch ist. — In der formalen Sprache des Anhangs A sind “X: 0 besitzt ein Inverses” und “Y: 0 ist die einzige reelle Zahl” zwei falsche Aussagen. Das tut der Tatsache, daß die *Implikation*  $X; \implies Y$  trotzdem richtig ist. Siehe dazu auch Seite 80f.

gelten muß.<sup>2</sup>

$$0 \cdot y + 0 \stackrel{(A3)}{=} 0 \cdot y \stackrel{(A3)}{=} (0 + 0) \cdot y \stackrel{(DG)}{=} 0 \cdot y + 0 \cdot y. \quad (3)$$

Addieren wir auf beiden Seiten das Negative der Zahl  $0 \cdot y$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(A3)}{=} 0 + 0 \stackrel{(A4)}{=} (- (0 \cdot y) + 0 \cdot y) + 0 \\ &\stackrel{(A1)}{=} - (0 \cdot y) + (0 \cdot y + 0) \stackrel{(3)}{=} - (0 \cdot y) + (0 \cdot y + 0 \cdot y) \\ &\stackrel{(A1)}{=} (- (0 \cdot y) + 0 \cdot y) + 0 \cdot y \stackrel{(A4)}{=} 0 + 0 \cdot y \stackrel{(A3)}{=} 0 \cdot y. \end{aligned}$$

Damit ist die Aussage (2) gezeigt. und wir können sie ausnutzen, um unser eigentliches Ziel  $x = 0$  herzuleiten:

$$x \stackrel{(M3)}{=} 1 \cdot x \stackrel{(1)}{=} (0^{-1} \cdot 0) \cdot x \stackrel{(M1)}{=} 0^{-1} \cdot (0 \cdot x) \stackrel{(2)}{=} 0^{-1} \cdot 0 \stackrel{(M2)}{=} 0 \cdot 0^{-1} \stackrel{(2)}{=} 0.$$

□

### Notation 2.3

- Sind  $x, y, z \in \mathbb{R}$  mit  $z \neq 0$ , so schreiben wir statt  $x + (-y)$  in aller Regel  $x - y$ , und statt  $x \cdot z^{-1}$  schreiben wir oft  $\frac{x}{z}$ . Außerdem schreiben wir statt  $x \cdot y$  meist nur  $xy$ .
- Wir führen für eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  und eine reelle Zahl  $x \in \mathbb{R}$  die *Potenzschreibweise*

$$x^n := \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{n\text{-mal}}$$

ein, und wir ergänzen diese um die Festlegungen

$$x^0 := 1$$

und

$$x^{-n} := \frac{1}{x^n} = \frac{1}{\underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{n\text{-mal}}}.$$

### Bemerkung 2.4 (Zahlbereichserweiterungen)

- Eine Menge mit zwei Operationen, so daß die oben aufgeführten Axiome (A1-4), (M1-4) und (DG) in Satz 2.1 erfüllt sind, nennt man in der Mathematik einen *Körper*.  
In diesem Sinne ist die Menge  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen ein Körper, denn für  $\mathbb{Q}$  sind alle Axiome in Satz 2.1 erfüllt.
- Auch die Menge  $\mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen mit ihrer Addition und Multiplikation erfüllt die meisten der Axiome in Satz 2.1 — lediglich das Axiom (M4), das Inverse bezüglich der Multiplikation verlangt, ist für die meisten ganzen Zahlen

<sup>2</sup>Das ist uns zwar aus der Schulmathematik als Rechenregel wohlbekannt, aber wir wollen uns einmal die Mühe machen, zu zeigen, daß sich diese bekannte Tatsache auch ohne weiteres aus den wenigen oben angeführten Axiomen herleiten läßt.

nicht erfüllt. Um genau zu sein, nur die ganzen Zahlen 1 und  $-1$  besitzen in  $\mathbb{Z}$  multiplikative Inverse, nämlich jeweils sich selbst.

- c. Bei der Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen sieht es schon erheblich schlechter aus. Bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation sind nur die Gesetze (A1-2), (M1-3) und (DG) erfüllt.
- d. In der Schule lernt man zunächst die natürlichen Zahlen kennen, da man mit ihnen als Kind im Alltag in ganz *natürlicher* Weise zwecks Zählens vertraut wird.

Das Manko, keine negativen Zahlen zur Verfügung zu haben und somit nicht beliebig subtrahieren zu können, führt letztlich zur Erweiterung des Zahlbegriffs in Form der ganzen Zahlen, die man auch recht früh in der Schule kennen lernt.

Die Notwendigkeit, Dinge auf mehrere Personen aufzuteilen, auch wenn dies nicht in ganzen Einheiten möglich ist, d.h. das Problem, nicht jede ganze Zahl durch jede andere ganze Zahl (ungleich Null) teilen zu können, führt dann in natürlicher Weise zur Erweiterung des Zahlbegriffs auf die rationalen Zahlen.<sup>3</sup> Weshalb die rationalen Zahlen nicht ausreichen, ist vielleicht nicht mehr ganz so einfach einzusehen. Wie wir bereits erwähnt haben, sind alle gängigen Operationen mit den rationalen Zahlen durchführbar.<sup>4</sup> Dennoch war schon in der Antike bekannt, daß es Zahlen geben muß, die als Längen vorkommen und nicht rational sind: die Diagonale eines Quadrates mit Seitenlänge 1 hat nach Pythagoras die Länge  $\sqrt{2}$  und man kann zeigen, daß das Quadrat keiner rationalen Zahl 2 sein kann. Das erklärt das Bedürfnis, weshalb man den Zahlbereich der rationalen Zahlen noch einmal erweitern möchte. Es erklärt aber nicht, weshalb und wie man dazu nun gerade auf die reellen Zahlen kommt. Es hat deshalb auch bis ins 19. Jahrhundert gedauert, die reellen Zahlen sauber einzuführen und zu charakterisieren. Für die Entwicklung der Analysis war dies ein großer Schritt und von fundamentaler Bedeutung. — Es ist von daher verständlich,

---

<sup>3</sup>Die rationalen Zahlen sind in gewisser Weise sehr typisch für das Vorgehen der Mathematiker. Wir wollen die ganze Zahl  $x$  durch  $y$  teilen und das geht nicht, sprich,  $y$  ist kein Teiler von  $x$ . Wie löst der Mathematiker das Problem? Er gibt dem Ergebnis einfach einen Namen:  $\frac{x}{y}$ . Auf den ersten Blick ist man damit keinen Schritt weiter. Wer eine Lösung in  $\mathbb{Z}$  gesucht hat, hat diese immer noch nicht. Er hat erst mal nur einen Namen für sein Problem. — Aber das ist nur die halbe Wahrheit. Denn der Mathematiker führt nicht nur die neuen Namen ein, er erklärt auch, wie man mit ihnen rechnet! Und damit ist etwas Neues, sehr interessantes erschaffen, von dem sich im Fall der rationalen Zahlen auch herausgestellt hat, daß es sehr nützlich ist, was nicht notwendig immer so sein muß, wenn ein Mathematiker ein Problem löst, indem er ihm einen Namen gibt.

<sup>4</sup>Wenn man ehrlich ist, verwendet man für Rechnungen im Alltag ohnehin keine reellen Zahlen, die nicht rational sind, da man von Dezimalzahlen stets nur endlich viele Nachkommastellen zum Rechnen verwendet.

wenn einige der im folgenden betrachteten Konzepte, die für die Charakterisierung und Anwendung der reellen Zahlen notwendig sind, ein wenig Zeit benötigen, um wirklich verstanden zu werden.

Wir wollen nun einige Rechenregeln sammeln, die in jedem Körper und damit auch in den reellen Zahlen gelten.

**Lemma 2.5** (Rechenregeln in  $\mathbb{R}$ )

Es seien  $x, y, z \in \mathbb{R}$ ,  $u, v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $n, m \in \mathbb{Z}$ .

<i>Kürzungsregel der Addition</i>	$x + y = x + z \implies y = z.$
<i>Kürzungsregel der Multiplikation</i>	$x \cdot y = x \cdot z \text{ und } x \neq 0 \implies y = z.$
<i>Minus mal Minus = Plus</i>	$-(-x) = x \text{ und } (-x) \cdot (-y) = x \cdot y.$
<i><math>\mathbb{R}</math> ist nullteilerfrei</i>	$x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } y = 0.$
<i>Multiplikation mit 0</i>	$0 \cdot x = x \cdot 0 = 0.$
<i>Doppeltes Invertieren tut nichts</i>	$(x^{-1})^{-1} = x \text{ für } x \neq 0.$
<i>Addition von Brüchen</i>	$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = \frac{x \cdot v + y \cdot u}{u \cdot v}.$
<i>Multiplikation von Brüchen</i>	$\frac{x}{u} \cdot \frac{y}{v} = \frac{x \cdot y}{u \cdot v}.$
<i>Potenzgesetze</i>	$x^n \cdot x^m = x^{n+m},$ $(x^n)^m = x^{nm}$ $x^n \cdot y^n = (xy)^n.$

Aus der Schule kennen wir eine Ordnungsrelation  $\leq$  auf  $\mathbb{R}$  die es uns erlaubt, je zwei reelle Zahlen bezüglich ihrer *Größe* miteinander zu vergleichen.

**Satz 2.6** (Die reellen Zahlen als angeordneter Körper)

Die wohlbekannt Relation  $\leq$  auf  $\mathbb{R}$  ist eine Totalordnung, d.h. sie erfüllt folgende folgende Axiome:

- (O1)  $x \leq x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .
- (O2)  $x \leq y$  und  $y \leq x$  impliziert  $x = y$ .
- (O3)  $x \leq y$  und  $y \leq z$  impliziert  $x \leq z$ .
- (TO) Für je zwei reelle Zahlen  $x \neq y$  gilt entweder  $x < y$  oder  $y < x$ .

Zudem gelten die folgenden wichtigen Rechenregeln:

<i>Verträglichkeit von <math>&lt;</math> mit der Addition</i>	$x < y \implies x + z < y + z.$
<i>Verträglichkeit von <math>&lt;</math> mit der Multiplikation</i>	$x < y \text{ und } 0 < z \implies x \cdot z < y \cdot z.$ $x < y \text{ und } z < 0 \implies x \cdot z > y \cdot z.$
<i>Invertieren dreht die Reihenfolge</i>	$0 < x < y \implies 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}.$
<i>Multiplikation mit <math>-1</math> dreht die Reihenfolge</i>	$0 < x \iff -x < 0$
<i>Quadratzahlen sind positiv</i>	$0 \neq x \implies 0 < x^2$
<i>Verträglichkeit mit dem Potenzieren</i>	$0 \leq x < y \text{ und } n \in \mathbb{N} \implies 0 \leq x^n < y^n$

**Bemerkung 2.7**

- a. Die Aussagen der Axiome (O1-3) und (TO) sind wieder so selbstverständlich, daß sie kaum der Rede wert erscheinen. Aber das täuscht. Diese wenigen Eigenschaften sind es, die man braucht, um sich die reellen Zahlen als hintereinander aufgereiht denken zu dürfen — wobei das Bild mit Vorsicht zu verwenden ist. Denn auch wenn ich zu zwei gegebenen reellen Zahlen sagen kann, welche zuerst in dieser Aufreihung kommt, so kann ich doch zu einer gegebenen Zahl nicht *die nächste* in der Reihe angeben. Die gibt es nicht, was wir weiter unten noch mal aufgreifen werden!

Es hat sich eingebürgert, die reellen Zahlen mit den Punkten auf einer Geraden zu identifizieren, der sogenannten *Zahlengeraden*.

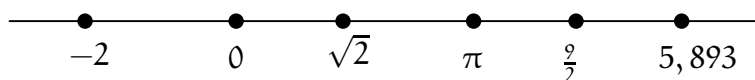


ABBILDUNG 1. Die Zahlengerade

- b. Da die Zahlbereiche der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$ , der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  und der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  als Teilmengen von  $\mathbb{R}$  aufgefaßt werden können, gelten die Rechenregeln aus Satz 2.6 auf in diesen.
- c. Einen Körper mit einer Relation, die den Axiomen(O1-3) und (TO) sowie den ersten beiden Rechenregeln in Satz 2.6 genügt, nennt man einen *angeordneten Körper*. In diesem Sinne ist auch die Menge  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen ein angeordneter Körper.

**Bemerkung 2.8** (Rationale und irrationale Zahlen)

Wenn man die rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden aufträgt, so füllen sie auf den ersten Blick schon einen erheblichen Teil der Zahlengeraden aus und es scheint erstaunlich, daß sie überhaupt noch Platz für andere Zahlen übriglassen sollen. Denn



zwischen zwei beliebigen rationalen Zahlen  $x = \frac{a}{b} < \frac{c}{d} = y$  liegt immer noch eine weitere rationale Zahl, egal wie dicht  $x$  und  $y$  schon beieinander liegen:

$$x < \frac{x+y}{2} = \frac{ad+bc}{2bd} < y.$$

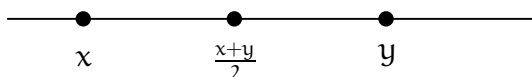
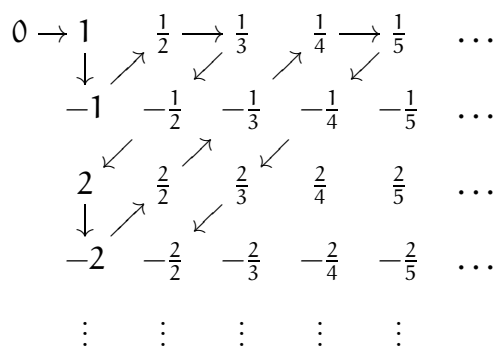


ABBILDUNG 2. Zwischen zwei rationale Zahlen paßt immer noch eine dritte.

Dennoch wissen wir, daß es reelle Zahlen gibt, die nicht rational sind, wie  $\sqrt{2}$ . Diese Zahlen nennt man *irrational*, und es stellt sich die Frage, ob es mehr rationale oder mehr irrationale Zahlen gibt. Um das gleich vorweg zu nehmen, von beiden gibt es unendlich viele. Was soll in dem Zusammenhang also *mehr* oder *weniger* bedeuten?

Dazu listen wir die rationalen Zahlen zunächst wie folgt auf



und laufen sie dann wie angedeutet entlang der Pfeile ab. Dabei sammeln wir jede rationale Zahl, die mehrfach vorkommt, nur bei ihrem ersten Auftreten auf. Auf diese Weise können wir die rationalen Zahlen *abzählen* wie die natürlichen Zahlen — man nennt das Verfahren das Cantorsche Diagonalverfahren.

Wir wollen nun zeigen, daß man die reellen Zahlen nicht *abzählen* kann, woraus dann folgt, daß es erheblich mehr irrationale Zahlen geben muß als rationale.<sup>5</sup> — Man sagt,  $\mathbb{Q}$  ist *abzählbar unendlich* und  $\mathbb{R}$  ist *überabzählbar unendlich*.

Um die Behauptung zu zeigen, nehmen wir ihr Gegenteil an und führen das zum Widerspruch, d.h. wir nehmen an, wir könnten die reellen Zahlen abzählen als  $\mathbb{R} =$

<sup>5</sup>Interessanterweise können wir beliebig viele rationale Zahlen konkret als Dezimalzahl hinschreiben, aber es ist unmöglich eine einzige irrationale Zahl als Dezimalzahl vollständig hinzuschreiben, da sie alle unendlich viele Nachkommastellen haben und nie periodisch sind. Wir charakterisieren sie in aller Regel nur durch ihre Eigenschaften:  $\sqrt{2}$  ist die irrationale Zahl, deren Quadrat 2 ist;  $\pi$  ist die irrationale Zahl, die wir als Flächeninhalt des Einheitskreises erhalten.

$\{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\}$ . Wir schreiben dann  $x_i$  als Dezimalzahl:

$$\begin{array}{rcccccccc} x_1 & = & a_{1,-n_1} & a_{1,-n_1+1} & \dots & a_{1,0}, & \underline{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ x_2 & = & a_{2,-n_2} & a_{2,-n_2+1} & \dots & a_{2,0}, & a_{21} & \underline{a_{22}} & a_{23} & \dots \\ x_3 & = & a_{3,-n_3} & a_{3,-n_3+1} & \dots & a_{3,0}, & a_{31} & a_{32} & \underline{a_{33}} & \dots \\ & & \vdots & & & & & & & \ddots \end{array}$$

Dann setzen wir  $x := 0, a_{11}a_{22}a_{33}\dots \in \mathbb{R}$ , d. h.  $x$  ist diejenige Zahl, die in obiger Aufzählung durch die unterstrichenen Diagonalelemente gegeben ist. Nun ändern wir jede der Ziffern von  $x$  ab (etwa  $b_{ii} = 1$ , falls  $a_{ii} = 0$  und  $b_{ii} = 0$  sonst) und erhalten eine Zahl

$$y = 0, b_{11}b_{22}b_{33}\dots \in \mathbb{R},$$

mit  $a_{ii} \neq b_{ii}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Nach Annahme gibt es einen Index  $i$  mit  $x_i = y$ , also  $a_{ii} = b_{ii}$ , im Widerspruch zur Konstruktion von  $y$ .  $\square$

Wir haben in der Bemerkung oben im Prinzip gezeigt, daß die Zahlbereichserweiterung von  $\mathbb{Q}$  nach  $\mathbb{R}$  ein sehr großer Schritt war — während die Erweiterungen von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{Z}$  und von  $\mathbb{Z}$  nach  $\mathbb{Q}$  vergleichsweise klein waren. Es stellt sich die Frage, woran das liegt und ob das notwendig war, sprich, ob man nicht mehr dazu genommen hat, als man überhaupt braucht. Nein, wir haben nur gerade soviel dazugenommen, wie nötig ist, um Analysis betreiben zu können, und die Ursache, daß dafür eine derart große Erweiterung nötig war, liegt im Supremumsaxiom (siehe Satz 2.11) — aber dazu müssen wir zunächst ein paar Begriffe einführen.

**Definition 2.9** (Supremum und Infimum)

Es sei  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$  eine nicht-leere Menge reeller Zahlen.

- Wir nennen  $s \in \mathbb{R}$  eine *obere Schranke* von  $A$ , falls  $x \leq s$  für alle  $x \in A$  gilt.
- Wir nennen  $A$  *nach oben beschränkt*, falls  $A$  eine obere Schranke besitzt.
- Wir nennen  $s \in \mathbb{R}$  das *Supremum* von  $A$ , falls  $s$  eine obere Schranke von  $A$  ist und es keine kleinere obere Schranke von  $A$  gibt, d.h. wenn  $s$  die kleinste obere Schranke für  $A$  ist. Das Supremum ist eindeutig bestimmt, wenn es existiert, und wir bezeichnen es dann mit  $\sup(A)$ .
- Wir nennen  $s \in \mathbb{R}$  das *Maximum* von  $A$ , wenn  $s \in A$  und  $x \leq s$  für alle  $x \in A$  gilt. Wenn das Maximum von  $A$  existiert, ist es zugleich das Supremum von  $A$  und wir bezeichnen es dann mit  $\max(A)$ .

Analog definiert man die Begriffe *untere Schranke*, *nach unten beschränkt*, Minimum von  $A$  ( $\min(A)$ ) und *Infimum* als kleinste untere Schranke ( $\inf(A)$ ).

**Beispiel 2.10**

- Betrachten wir die reellen Zahlen mit ihrer üblichen Ordnung und die Menge  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$ , so ist  $1 = \sup(A) = \max(A)$  das Supremum von  $A$ , das zugleich ein Maximum ist, und  $0 = \inf(A)$  ist ein Infimum von  $A$ , das kein Minimum ist.

b. Die Menge

$$\{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ und } x^2 < 2\}$$

ist nach oben beschränkt und ihr Supremum in  $\mathbb{R}$  ist  $\sqrt{2}$ . In  $\mathbb{Q}$  besitzt die Menge hingegen kein Supremum.

Der angeordnete Körper der reellen Zahlen zeichnet sich gegenüber dem angeordneten Körper der rationalen Zahlen nun durch die folgende zusätzliche Eigenschaft aus, die, wie wir gesehen haben, in den rationalen Zahlen so nicht gilt.

**Satz 2.11** (Das Supremumsaxiom der reellen Zahlen)

*Jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R}$  besitzt ein Supremum.*

**Bemerkung 2.12** (Axiomatische Charakterisierung von  $\mathbb{R}$ )

Die reellen Zahlen sind der einzige angeordnete Körper, der das Supremumsaxiom erfüllt. D.h. insbesondere, wenn man die rationalen Zahlen so erweitern will, daß das Supremumsaxiom erfüllt ist, hat man nur eine einzige Wahl, nämlich die Dezimalzahlen.

Eine sehr wichtige Konsequenz des Supremumsaxioms ist die Existenz von  $n$ -ten Wurzeln in  $\mathbb{R}$ . Diese erschließt sich aus der Dezimalzahldarstellung nicht so ohne weiteres, obwohl wir dies in der Schule sicher nie hinterfragt haben.

**Korollar 2.13** (Existenz von  $n$ -ten Wurzeln)

*Zu jeder reellen Zahl  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \geq 0$  und jeder natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$  gibt es genau eine reelle Zahl  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a \geq 0$  und  $a^n = x$ .*

*Wir nennen diese Zahl die  $n$ -te Wurzel aus  $x$  und bezeichnen sie mit  $\sqrt[n]{x}$  oder  $x^{\frac{1}{n}}$ .*

**Bemerkung 2.14**

Für eine rationale Zahl  $q = \frac{n}{m}$  mit  $n, m \in \mathbb{Z}$  und  $m \neq 0$  sowie für eine nicht-negative reelle Zahl  $x \in \mathbb{R}$  definieren wir

$$x^q = x^{\frac{n}{m}} := \sqrt[m]{x^n} = (x^n)^{\frac{1}{m}}.$$

Die Potenzgesetze aus Lemma 2.5 gelten dann auch für rationale Exponenten, sofern die Basis nicht-negativ ist.

Eine weitere wichtige Operation auf den reellen Zahlen ist der Absolutbetrag.

**Definition 2.15** (Absolutbetrag)

Für eine reelle Zahl  $x \in \mathbb{R}$  definieren wir den *Betrag* oder *Absolutbetrag* von  $x$  durch

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Für das Rechnen mit dem Absolutbetrag gelten die folgenden Rechenregeln.

**Lemma 2.16** (Eigenschaften des Betrages)

*Es seien  $x, y \in \mathbb{R}$ .*

<i>Der Betrag ist multiplikativ.</i>	$ x \cdot y  =  x  \cdot  y .$
<i>Dreiecksungleichung</i>	$ x + y  \leq  x  +  y .$
<i>Definitheit des Betrags</i>	$ x  = 0 \iff x = 0.$
<i>Wurzeln sind stets nicht-negativ!</i>	$\sqrt{x^2} =  x .$
	$ x  =  -x  \geq 0.$

Die wichtigsten Teilmengen von  $\mathbb{R}$  für die Analysis sind die Intervalle.

**Definition 2.17** (Intervalle)

Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$ . Wir nennen eine Menge der Form

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

ein *abgeschlossenes Intervall*, eine Menge der Form

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

ein *offenes Intervall* und Mengen der Form

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

bzw.

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

*halboffene Intervalle*. Mengen der Form

$$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\},$$

$$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\},$$

$$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\},$$

$$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

$$(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$$

heißen *uneigentliche Intervalle*.

**Beispiel 2.18**

Wegen  $|x - 2| < 5$  genau dann wenn  $-5 < x - 2 < 5$  genau dann wenn  $-3 < x < 7$ , gilt

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 5\} = (-3, 7).$$

**Aufgabe 2.19**

Kürze die folgenden rationalen Zahlen vollständig:

$$\frac{4}{8}, \quad -\frac{36}{42}, \quad \frac{-39}{81}, \quad \frac{15}{-25}.$$

**Aufgabe 2.20**

Ordne die folgenden rationalen Zahlen der Größe nach an:

$$\frac{9}{11}, \frac{37}{45}, \frac{121}{78}, \frac{178}{222}, \frac{76}{88}.$$

**Aufgabe 2.21**

Berechne die folgenden rationalen Zahlen:

$$\frac{18}{17} + \frac{9}{2}, \quad \frac{11}{5} \cdot \frac{7}{15}, \quad \frac{18}{17} - \frac{9}{2}, \quad \frac{11}{5} + \frac{7}{15}.$$

**Aufgabe 2.22**

Es seien  $0 \neq a, b \in \mathbb{Z}$  zwei ganze Zahlen. Mit welchen der folgenden Zahlen stimmt  $q = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$  für jede Wahl von  $a$  und  $b$  überein:

$$r = \frac{1}{a-b}, \quad s = \frac{ab}{a+b}, \quad t = \frac{b-a}{ab}, \quad u = \frac{a-b}{ab}.$$

**Aufgabe 2.23**

In einem elektrischen Netzwerk gilt für den Widerstand  $R$  zweier hintereinander geschalteter Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  (siehe Abbildung 3)

$$R = R_1 + R_2.$$

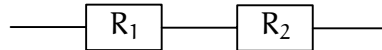


ABBILDUNG 3. Hintereinander geschaltete Widerstände  $R = R_1 + R_2$

Analog gilt für den Widerstand  $R$  zweier parallel geschalteter Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  (siehe Abbildung 4)

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

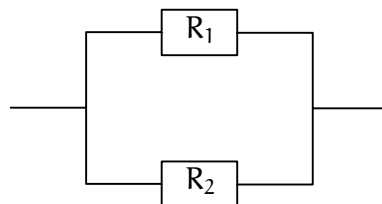


ABBILDUNG 4. Parallel geschaltete Widerstände  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

Gib eine Formel für den Widerstand  $R$  der Schaltung in Abbildung 5 in Form eines Bruches an.

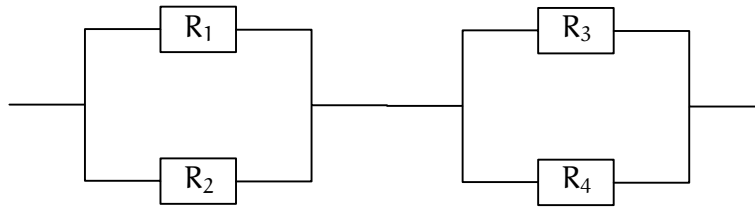


ABBILDUNG 5. Berechne den Gesamtwiderstand der Schaltung.

### Aufgabe 2.24

Schreibe die Menge

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| > 0 \text{ und } |x - 1| \leq 10\}$$

als Vereinigung von Intervallen.

### Aufgabe 2.25

Finde eine obere und eine untere Schranke für die Menge

$$A = \left\{ \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{6} \mid x \in [-1, 1] \right\}$$

durch Abschätzen des Betrags

$$\left| \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{6} \right|.$$

### Aufgabe 2.26

Bestimme Supremum, Infimum, Maximum und Minimum (sofern sie existieren) der folgenden Mengen:

- $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 3| > 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$ .
- $B = \left\{ n + \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ .
- $C = \left\{ \frac{m+n}{m \cdot n} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$ .

### Aufgabe 2.27

Seien  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  Teilmengen, so daß  $\sup(A)$  und  $\sup(B)$  existieren. Wir setzen

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Begründe, weshalb  $\sup(A + B)$  existiert und  $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$  gilt.

**Aufgabe 2.28**

Wo liegt der Fehler beim folgenden Beweis für die Aussage  $1 = 2$ ?

$$\begin{array}{ll}
 x := 1 \text{ und } y := 2 & \\
 \implies x + y = 3 & | \cdot (x - y) \\
 \implies x^2 - y^2 = 3x - 3y & | + (y^2 - 3x) \\
 \implies x^2 - 3x = y^2 - 3y & | + \frac{9}{4} \\
 \implies x^2 - 3x + \frac{9}{4} = y^2 - 3y + \frac{9}{4} & | \text{ Binomischer Lehrsatz} \\
 \implies \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 & | \sqrt{\dots} \\
 \implies x - \frac{3}{2} = y - \frac{3}{2} & | + \frac{3}{2} \\
 \implies x = y & | \text{ Einsetzen von } x = 1, y = 2 \\
 \implies 1 = 2 &
 \end{array}$$

**Aufgabe 2.29**

Wo liegt der Fehler beim folgenden Beweis für die Aussage  $1 = 2$ ?

$$\begin{array}{ll}
 x := 1 & | \cdot x \\
 \implies x^2 = x & | - 1 \\
 \implies x^2 - 1 = x - 1 & | \text{ 3. Binomische Formel} \\
 \implies (x - 1) \cdot (x + 1) = x - 1 & | : (x - 1) \\
 \implies x + 1 = 1 & | \text{ Einsetzen von } x = 1 \\
 \implies 2 = 1 &
 \end{array}$$

**Aufgabe 2.30**

Zeige, zwei positive reelle Zahlen  $x, y \in (0, \infty)$  erfüllen stets die Ungleichung

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2.$$

Für welche Werte von  $x$  und  $y$  gilt die Gleichheit?

### § 3 Die natürlichen Zahlen und die vollständige Induktion

Nachdem wir uns ausführlich mit den reellen Zahlen beschäftigt haben, kommen wir auf eine zentrale Eigenschaft der natürlichen Zahlen zu sprechen, aus der sich ein wichtiges Beweisprinzip ableitet.

**Bemerkung 3.1** (Prinzip der vollständigen Induktion)

Die folgende Eigenschaft der natürlichen Zahlen ist uns wohl vertraut:

Addiert man zur Zahl 0 sukzessive die Zahl 1, so erhält man nach und nach alle natürlichen Zahlen.

Man nennt sie das *Prinzip der vollständigen Induktion*.

Man kann diese Eigenschaft der natürlichen Zahlen oft dann als Beweistechnik einsetzen,

- wenn man eine Aussage  $\mathcal{A}$  beweisen will, die von einer natürlichen Zahl  $n$  abhängt, und
- wenn man zudem diese Aussage für eine beliebige Wahl von  $n \geq 1$  zeigen will.

Die Abhängigkeit der Aussage  $\mathcal{A}$  von der natürlichen Zahl  $n$  drückt man dann dadurch aus, daß man sie als Index anhängt, sprich  $\mathcal{A}_n$  statt nur  $\mathcal{A}$  schreibt. Ein typisches Beispiel für eine solche Aussage wäre

$$\mathcal{A}_n : \text{eine Zahl der Form } n^3 - n \text{ ist durch 6 teilbar}$$

wobei hier  $n \in \mathbb{N}$  irgend eine natürliche Zahl sein darf. Will man diese Aussage  $\mathcal{A}_n$  nun für jedes  $n \geq 1$  zeigen, so zeigt man sie zunächst für die Zahl 1 selbst<sup>6</sup> und zeigt dann, wenn sie für eine feste Zahl  $n$  bereits gilt,<sup>7</sup> gilt sie auch für die nachfolgende Zahl  $n + 1$ .<sup>8</sup> Die oben beschriebene Eigenschaft der natürlichen Zahlen erlaubt es uns dann, ausgehend von der Korrektheit von  $\mathcal{A}_1$  auf die von  $\mathcal{A}_2$  zu schließen, dann auf die von  $\mathcal{A}_3$  und so fortfahrend auf die Korrektheit der Aussage  $\mathcal{A}_n$  für jede natürliche Zahl  $n$ .

Wir formulieren das Prinzip der vollständigen Induktion als Beweisprinzip noch einmal etwas kompakter.

**Satz 3.2** (Prinzip der vollständigen Induktion)

*Es gelte eine Aussage  $\mathcal{A}_n$  für die natürliche Zahl  $n = 1$  (Induktionsanfang), außerdem sei folgendes richtig: gilt die Aussage für ein  $n \geq 1$  (Induktionsvoraussetzung), so gilt sie auch für  $n + 1$  (Induktionsschluß). Dann gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen  $n$ .* □

Wendet man diese Beweistechnik an und sind die Aussagen mit  $n$  induziert, so sagt man auch, man führe den Beweis durch *Induktion nach  $n$* .

**Beispiel 3.3**

Die Zahl  $n^3 - n$  ist für jedes  $n \in \mathbb{N}$  durch 6 teilbar.

**Beweis:** Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion und formulieren dazu zunächst unsere Aussageform  $\mathcal{A}_n$ :

$$\mathcal{A}_n : \text{Es gibt ein } k \in \mathbb{N} \text{ mit } n^3 - n = 6 \cdot k.$$

**Induktionsanfang  $n = 1$ :**  $1^3 - 1 = 0 = 6 \cdot 0$ . Also ist  $\mathcal{A}_1$  wahr.

**Induktionsvoraussetzung:** Wir setzen voraus, daß  $\mathcal{A}_n$  wahr ist, d.h. es gibt ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $n^3 - n = 6 \cdot k$ .

<sup>6</sup>Dies nennt man den *Induktionsanfang*.

<sup>7</sup>Anzunehmen, daß sie für  $n$  gilt, nennt man die *Induktionsvoraussetzung*.

<sup>8</sup>Dies nennt man den *Induktionsschritt*.



**Induktionsschritt:**  $n \mapsto n + 1$ : Man beachte, daß eine der beiden Zahlen  $n$  oder  $n + 1$  gerade sein muß, und daß deshalb die Zahl  $n \cdot (n + 1)$  gerade ist. Es gibt also eine natürliche Zahl  $l \in \mathbb{N}$  mit  $n \cdot (n + 1) = 2 \cdot l$ . Damit erhalten wir dann

$$(n + 1)^3 - (n + 1) = (n^3 - n) + 3 \cdot n \cdot (n + 1) = 6k + 6l = 6 \cdot (k + l).$$

Wir haben also gezeigt, daß  $\mathcal{A}_{n+1}$  wahr ist.

Aus dem Prinzip der vollständigen Induktion 3.2 folgern wir dann, daß  $\mathcal{A}_n$  wahr ist für alle  $n \in \mathbb{N}$ ; das heißt, daß  $n^3 - n$  stets durch 6 teilbar ist.  $\square$

**Bemerkung 3.4** (Varianten der vollständigen Induktion)

a. *Alternativer Induktionsanfang:*

Statt  $n = 1$  als Induktionsanfang zu wählen, kann eine beliebige ganze Zahl  $n_0 \in \mathbb{Z}$  als Induktionsanfang dienen. Man erhält dann, daß  $\mathcal{A}_n$  wahr ist für alle  $n \geq n_0$ . Denn, man erhält alle ganzen Zahlen  $n \geq n_0$ , indem man zu  $n_0$  sukzessive 1 addiert.

b. *Alternative Induktionsvoraussetzung:*

Im Induktionsschritt schließen wir von  $\mathcal{A}_n$  auf  $\mathcal{A}_{n+1}$ , d.h. wir setzen nur  $\mathcal{A}_n$  als richtig voraus und schließen daraus die Korrektheit von  $\mathcal{A}_{n+1}$ . Stattdessen können wir auch  $\mathcal{A}_k$  für  $k = n_0, \dots, n$  als richtig voraussetzen und auf  $\mathcal{A}_{n+1}$  schließen (wobei  $\mathcal{A}_{n_0}$  der Induktionsanfang sein soll). Das ist manchmal hilfreich.

**Beispiel 3.5** (Gauß)

Die Summe der natürlichen Zahlen bis zu einer gegebenen Zahl  $n$  ist

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}.$$

Man beweist die Aussage durch Induktion nach  $n$ , wobei sie für  $n = 1$  offenbar richtig ist. Nehmen wir nun an, daß sie für  $n$  gilt, so folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n + 1) \stackrel{\text{Ind}}{=} \frac{n \cdot (n + 1)}{2} + (n + 1) = \frac{(n + 1) \cdot (n + 2)}{2}.$$

Also gilt die Aussage für alle  $n \in \mathbb{N}$  nach dem Prinzip der vollständigen Induktion.

Eine schöne Anwendung des Prinzips der vollständigen Induktion ist der Beweis des binomischen Lehrsatzes. Um ihn formulieren zu können benötigen wir die Begriffe *Fakultät* und *Binomialkoeffizient* sowie eine einfache Rechenregel für Binomialkoeffizienten, die im *Pascalschen Dreieck* ausgedrückt werden kann.

**Definition 3.6** (Fakultät)

Für eine ganze Zahl  $n \geq 0$  definieren wir die *Fakultät* durch

$$n! := \prod_{i=1}^n i = 1 \cdot \dots \cdot n,$$

falls  $n \geq 1$ , und durch  $0! := 1$ .

Für nicht-negative ganze Zahlen  $k, n \geq 0$  erklären wir den *Binomialkoeffizienten* von  $n$  über  $k$  durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1},$$

falls  $0 \leq k \leq n$ , und durch  $\binom{n}{k} := 0$  sonst.

Die folgende Rechenregel für Binomialkoeffizienten ergibt sich unmittelbar aus der Definition, wenn man die unterschiedlichen Fälle geschickt unterscheidet.

**Lemma 3.7** (Pascalsche Gleichung)

*Es seien  $n, k \geq 0$  nicht-negative ganze Zahlen. Dann gilt*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

**Satz 3.8** (Binomischer Lehrsatz)

*Es seien  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ , so gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}.$$

**Beweis:** Wir führen den Beweis durch Induktion nach  $n$ .

**Induktionsanfang:**  $n = 0$ : Nach Definition gilt

$$(x+y)^0 = 1 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} \cdot x^k \cdot y^{0-k}.$$

**Induktionsschluß:**  $n \mapsto n+1$ : Es gilt

$$\begin{aligned} (x+y)^{n+1} &= (x+y)^n \cdot (x+y) = (x+y)^n \cdot x + (x+y)^n \cdot y \\ &\stackrel{\text{Ind.}}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^{k+1} \cdot y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k} \\ &= x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot x^{k+1} \cdot y^{n-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k} + y^{n+1} \\ &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k} + y^{n+1} \\ &\stackrel{3.7}{=} x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k} + y^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k} \end{aligned}$$

Die Aussage folgt damit aus dem Prinzip der vollständigen Induktion.  $\square$

**Bemerkung 3.9** (Pascalsches Dreieck)

Man ordnet die Binomialkoeffizienten gerne in der folgenden Form an, die als Pascalsches Dreieck bekannt ist:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} \\
 & & & & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
 & & & & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
 & & & & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
 & & & & & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4}
 \end{array}$$

Berechnet man die Werte der Binomialkoeffizienten, erhält man die folgende Gestalt:

$$\begin{array}{rcccccc}
 0. \text{ Zeile:} & & & & & & 1 \\
 1. \text{ Zeile:} & & & & & 1 & 1 \\
 2. \text{ Zeile:} & & & & 1 & 2 & 1 \\
 3. \text{ Zeile:} & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 4. \text{ Zeile:} & 1 & 4 & 6 & 4 & 1
 \end{array}$$

Aufgrund von Lemma 3.7 kann man die Einträge der  $n + 1$ -ten Zeile aus den Einträgen der  $n$ -ten Zeile berechnen. Graphisch im Pascalschen Dreieck nimmt die Proposition folgende Gestalt an:

$$\begin{array}{ccc}
 \binom{n}{k-1} & + & \binom{n}{k} \\
 \swarrow & & \searrow \\
 & \binom{n+1}{k} &
 \end{array}$$

D.h. die Summe zweier benachbarter Einträge der  $n$ -ten Zeile liefert den mittig unter ihnen stehenden Eintrag der  $n + 1$ -ten Zeile.

Aufgrund des binomischen Lehrsatzes sind die Einträge der  $n$ -ten Zeile des Pascalschen Dreiecks genau die Koeffizienten, die wir erhalten, wenn wir  $(x + y)^n$  aus-schreiben. Z.B.

$$(x + y)^3 = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2y + 3 \cdot xy^2 + 1 \cdot y^3.$$

**Aufgabe 3.10** (Endliche geometrische Reihe)

Zeige durch Induktion nach  $n$ , für  $1 \neq x \in \mathbb{R}$  und  $n \geq 0$  gilt stets

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

**Aufgabe 3.11** (Bernoullische Ungleichung)

Zeige durch Induktion nach  $n$ , für  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \geq -1$  und  $0 \leq n \in \mathbb{Z}$  gilt stets

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

**Aufgabe 3.12**

Zeige durch Induktion nach  $n$  die Formel

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}.$$

**Aufgabe 3.13**

Zeige, daß alle Zahlen der Form  $n^3 + 5n$  für  $n \in \mathbb{N}$  durch 6 teilbar sind.

**Aufgabe 3.14**

Beweise die Pascalsche Gleichung in Lemma 3.7 durch direktes Nachrechnen.

**Aufgabe 3.15**

Begründe, weshalb die folgende Gleichung für alle  $n \in \mathbb{N}$  richtig ist:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 0.$$

## § 4 Die komplexen Zahlen

Wir haben oben kurz angedeutet, wie die fehlende Möglichkeit, ein Problem in einem vertrauten Zahlbereich zu lösen, durch Erweiterung des Zahlbereichs gelöst werden kann:

- beliebige Subtraktionen führen von  $\mathbb{N}$  zu  $\mathbb{Z}$ ;
- beliebige Divisionen führen von  $\mathbb{Z}$  zu  $\mathbb{Q}$ ;
- Wurzeln aus positiven Zahlen inspirieren die Erweiterung von  $\mathbb{Q}$  auf  $\mathbb{R}$ .

Aber gerade die Motivation zur letzten Erweiterung macht uns auch schon wieder unzufrieden mit  $\mathbb{R}$ . Weshalb sollen wir nur Wurzeln aus positiven Zahlen ziehen können?

Aus Satz 2.6 wissen wir, daß Quadratzahlen in  $\mathbb{R}$  stets nicht-negativ sind. Eine Gleichung etwa der Form

$$x^2 = -1$$

kann mithin in  $\mathbb{R}$  keine Lösung haben, oder anders formuliert, die Zahl  $-1$  kann dort keine Quadratwurzel besitzen. Das ist ein neues Problem ... wie wäre es also mit einer neuen Zahlbereichserweiterung, um das Problem zu lösen?

Bei den bisherigen Zahlbereichen waren wir stets in der Lage, uns die Zahlen als Punkte auf der Zahlengeraden vorzustellen. Mit jeder Erweiterung wurde die Zahlengerade dabei voller, und unsere Interpretation sagt, daß die reellen Zahlen sie komplett ausfüllen. Wenn wir den Zahlbereich  $\mathbb{R}$  also erweitern wollen, werden wir keine Punkte auf der Zahlengeraden hinzunehmen können, das heißt, wir werden nicht mit *einer* Dimension auskommen. Da liegt es doch vielleicht nahe, von der Zahlengeraden zur *Zahlenebene* überzugehen. Seit René Descartes kennen wir die kartesischen Koordinaten und wissen, daß wir Punkte in der Ebene durch Angabe von zwei Koordinaten  $(x, y)$ , d.h. durch Angabe von zwei reellen Zahlen  $x$  und  $y$ ,

darstellen können. Wir wollen nun also auf der Menge dieser Punkte eine Addition und eine Multiplikation einführen, so daß möglichst alle vertrauten Rechenregeln, d.h. die Körperaxiome aus Satz 2.1, gelten. Außerdem wollen wir unsere bisherigen Zahlbereiche, insbesondere die reellen Zahlen, darin wiederfinden, vorzugsweise als  $x$ -Achse. Dies motiviert die folgende Definition, wobei die Addition als aus der Schule bekannte Vektoraddition naheliegend ist, die Multiplikation zunächst aber vollkommen schleierhaft erscheinen muß. Will man den Satz beweisen, besteht das größte Problem darin, zu einer gegebenen Zahl ungleich  $0$  ihr Inverses zu finden. Dazu schaue man sich die Rechenregeln in Lemma 4.9 an.

**Satz 4.1** (Der Körper der komplexen Zahlen)

*Wir setzen*

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

*und definieren für  $(x, y), (u, v) \in \mathbb{C}$*

$$(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v) \in \mathbb{C}$$

*sowie*

$$(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu) \in \mathbb{C}.$$

*Dann erfüllt  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  die Körperaxiome (A1-A4), (M1-M4) sowie (DG) in Satz 2.1, d.h.  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  ist ein Körper. Wir nennen ihn den Körper der komplexen Zahlen.*

**Bemerkung 4.2** (Rechenregeln in  $\mathbb{C}$ )

Da sich die Rechenregeln für  $\mathbb{R}$  in Lemma 2.5 unmittelbar aus den Körperaxiomen ableiten lassen, gelten sie analog auch in  $\mathbb{C}$ !

Damit gelten insbesondere die Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten in  $\mathbb{C}$ . Man kann sie aber *nicht* so ohne weiteres auf *Brüche* im Exponenten verallgemeinern! Würde dies gehen, so hätten wir

$$-1 = (-1)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{1}{2}} = ((-1) \cdot (-1))^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1,$$

was offenbar nicht richtig ist! Zwar besitzt die Zahl  $-1$  in  $\mathbb{C}$  die Quadratwurzel  $i$ , aber diese werden wir nicht mit  $(-1)^{\frac{1}{2}}$  bezeichnen, da sie den dann erwarteten Potenzgesetzen nicht so ohne weiteres genügt.

**Bemerkung 4.3** ( $\mathbb{R}$  als Teilkörper von  $\mathbb{C}$ )

Wir identifizieren dann  $\mathbb{R}$  mit der  $x$ -Achse  $\mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$  und stellen fest, daß für zwei reelle Zahlen  $(x, 0)$  und  $(u, 0)$

$$(x, 0) + (u, 0) = (x + u, 0 + 0) = (x + u, 0)$$

sowie

$$(x, 0) \cdot (u, 0) = (x \cdot u + 0 \cdot 0, x \cdot 0 + 0 \cdot u) = (xu, 0)$$

gilt. D.h. die neue Addition und Multiplikation führt für reelle Zahlen zum gewohnten Ergebnis. Man sagt deshalb auch, daß die reellen Zahlen ein Teilkörper von  $\mathbb{C}$  sind.

**Notation 4.4** (Die Schreibweise  $x + iy$ )

Statt einer reellen Zahl  $x$  in Zukunft  $(x, 0)$  zu schreiben, ist uns viel zu umständlich, wie die Notation  $(x, y)$  für eine komplexe Zahl überhaupt recht umständlich ist. Wir suchen eine schönere, leichter zu überblickende Notation!

Dazu betrachten wir die komplexe Zahl

$$i := (0, 1) \in \mathbb{C}$$

auf der  $y$ -Achse und stellen fest, daß stets

$$(0, 1) \cdot (y, 0) = (0 \cdot y + 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 1 \cdot y) = (0, y)$$

gilt und damit

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0).$$

Dabei sind die Zahlen  $(x, 0)$  und  $(y, 0)$  reelle Zahlen, für die wir im folgenden der Einfachheit halber wie bisher  $x$  und  $y$  schreiben, so daß wir die obige Gleichung auch schreiben können als

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + i \cdot y = x + iy.$$

Damit gilt dann

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Will man eine komplexe Zahl in der Form  $z = x + iy$  als Punkt in der Zahlenebene angeben, so muß man  $x$  in die  $x$ -Richtung abtragen und  $y$  in die  $y$ -Richtung.

**Bemerkung 4.5** (Die imaginäre Einheit  $i$ )

Ein Vorteil der neuen Notation ist, daß man sich die komplizierte Formel für die Multiplikation nicht merken muß, sondern ganz einfach herleiten kann. Dazu stellt man zunächst fest, daß

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) = -1$$

gilt. Das heißt,  $i$  löst die Gleichung  $x^2 = -1$  und ist damit eine Quadratwurzel aus  $-1$ . Da das unsere Ausgangsproblem löst, kann man sich die Tatsache sicher leicht merken. Die komplexe Zahl  $i$  wird auch die *imaginäre Einheit* genannt.<sup>9</sup>

Für zwei beliebige komplexe Zahlen  $x + iy, u + iv \in \mathbb{C}$  erhalten wir damit dann

$$\begin{aligned} (x + iy) \cdot (u + iv) &\stackrel{\text{(DG)}}{=} xu + xiv + iyu + iyiv \\ &\stackrel{\text{(A2),(M2)}}{=} xu + i^2yv + ixv + iyu \\ &\stackrel{\text{(A1),(DG)}}{=} (xu + i^2yv) + i \cdot (xv + yu) \\ &= (xu - yv) + i \cdot (xv + yu). \end{aligned}$$

Damit steht die komplizierte Formel für die Multiplikation da, und auf einmal liegt es auch ganz nahe, diesen Ansatz zu machen und zu probieren. Denn allein mit den

---

<sup>9</sup>In der Elektrotechnik wird sie traditionell mit  $j$  statt mit  $i$  bezeichnet.

beiden Annahmen, daß die Zahlbereichserweiterung die Zahlenebene sein soll und daß der Punkt  $i = (0, 1)$  eine Quadratwurzel aus  $-1$  werden soll, sieht man aus obiger Rechnung, daß man für die Multiplikation gar keine andere Wahl hat. Daß die Annahmen sinnvoll sind und zum Ziel führen, steht dabei natürlich auf einem ganz anderen Blatt.

**Bemerkung 4.6** ( $\mathbb{C}$  ist nicht angeordnet.)

Eine besonders gute Eigenschaft der reellen Zahlen ist, daß sie ein angeordneter Körper sind, sprich, daß wir zwei Zahlen bezüglich ihrer Größe vergleichen können und daß dabei die Gesetzmäßigkeiten in Satz 2.6 gelten. In der Zahlenebene gibt es im Gegensatz zur Zahlengerade keine natürliche Art, die Zahlen bezüglich ihrer Größe zu vergleichen. Aber es gab ja auch keine natürlich Art, sie miteinander zu multiplizieren und wir haben uns dennoch eine sinnvolle Multiplikation einfallen lassen. Gibt es entsprechend auch eine sinnvolle Ordnungsrelation, so daß  $\mathbb{C}$  ein angeordneter Körper wird? Nein!

**Behauptung:** Es gibt keine Totalordnung " $\leq$ " auf  $\mathbb{C}$ , die  $\mathbb{C}$  zu einem angeordneten Körper macht.

**Beweis:** Angenommen, es gäbe eine Ordnungsrelation " $\leq$ " auf  $\mathbb{C}$ , so daß die Rechenregeln aus Satz 2.6 gelten. Dann muß entweder  $0 < i$  oder  $0 < -i$  gelten, und somit  $0 < i^2 = -1$  oder  $0 < (-i)^2 = -1$ , was im Widerspruch zu  $0 < 1$  steht.  $\square$

Anders als die Ordnungsrelation läßt sich der Begriff des *Absolutbetrags* auf die komplexen Zahlen verallgemeinern. Er mißt wie in  $\mathbb{R}$  den Abstand zum Ursprung. Auf den komplexen Zahlen haben wir aber noch drei weitere wichtige Operationen, die auf  $\mathbb{R}$  noch keine Bedeutung hatten, und wir führen sie alle gemeinsam in der folgenden Definition ein.

**Definition 4.7** (Die komplexe Konjugation)

- a. Wir definieren den *Absolutbetrag* für eine komplexe Zahl  $z = x + iy$  durch

$$|z| = |x + iy| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Man beachte dabei, daß  $x^2 + y^2$  als nicht-negative reelle Zahl stets eine eindeutige nicht-negative Quadratwurzel besitzt.

- b. Wir definieren die *komplexe Konjugation* einer komplexen Zahl  $z = x + iy$  als

$$\bar{z} = \overline{x + iy} := x - iy.$$

Die Zahl  $\bar{z}$  heißt dann die zu  $z$  *konjugierte komplexe Zahl*.

- c. Für eine komplexe Zahl  $z = x + iy$  heißt die reelle Zahl

$$\operatorname{Re}(z) := x$$

der *Realteil* von  $z$  und die reelle Zahl

$$\operatorname{Im}(z) := y$$

heißt ihr *Imaginärteil*.

**Bemerkung 4.8**

Bei der oben eingeführten Definition des Absolutbetrages handelt es sich um den aus der Schule bekannten euklidischen Abstand des Punktes  $(x, y)$  zum Ursprung (siehe auch Bemerkung 4.12).

Außerdem beachte man, daß für eine reelle Zahl  $x$  stets  $\sqrt{x^2} = |x|$  gilt. Die *neue* Definition ihres Absolutbetrages stimmt also mit der alten überein.

Die folgenden Rechenregeln sind bis auf die Dreiecksungleichung sehr einfach nachzuprüfen. Besonders hilfreich ist dabei die erste Formel zur Berechnung des multiplikativen Inversen einer komplexen Zahl.

**Lemma 4.9** (Einfache Rechenregeln in  $\mathbb{C}$ )

Es seien  $z, w \in \mathbb{C}$  zwei komplexe Zahlen.

$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{ z ^2}$ für $z \neq 0$	$z \cdot \bar{z} =  z ^2$
Der Betrag ist multiplikativ.	$ z \cdot w  =  z  \cdot  w $ .
Dreiecksungleichung	$ z + w  \leq  z  +  w $ .
Definitheit des Betrags	$ z  = 0 \iff z = 0$ .
Die Konjugation ist additiv und multiplikativ.	$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ und $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ .
$\bar{\bar{z}} = z$	$\bar{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$
$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \leq  z $	$\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} \leq  z $
$ z  =  \bar{z} $	

**Beispiel 4.10**

Wir betrachten die komplexe Zahl

$$z = i - 1 = -1 + i.$$

Dann gilt  $\operatorname{Re}(z) = -1$ ,  $\operatorname{Im}(z) = 1$  und  $\bar{z} = -1 - i = -(1 + i)$ . Für den Betrag von  $z$  rechnen wir

$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

und damit erhalten wir das Inverse von  $z$  als

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{-1 - i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

**Bemerkung 4.11** (Geometrische Deutung der Addition und des Betrags)

Die Addition ist einfach die komponentenweise Addition, also die Addition der Vektoren, und die Dreiecksungleichung besagt deshalb im wesentlichen, daß in einem



Dreieck die Summe der Seitenlängen von zwei Seiten stets eine obere Schranke für die Seitenlänge der dritten Seite ist.

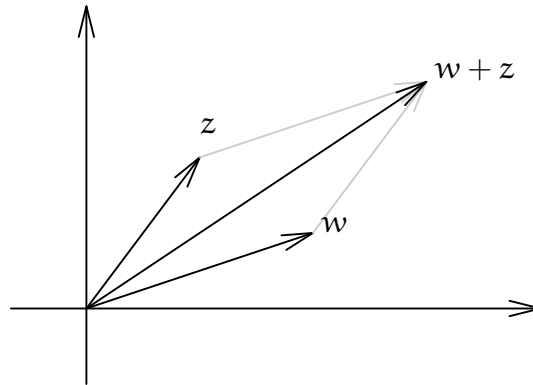


ABBILDUNG 6. Addition in  $\mathbb{C}$  als Vektoraddition

Der Absolutbetrag einer komplexen Zahl ist nach dem Satz von Pythagoras gerade die Länge des zugehörigen Vektors (siehe Abbildung 7). Die komplexen Zahlen vom

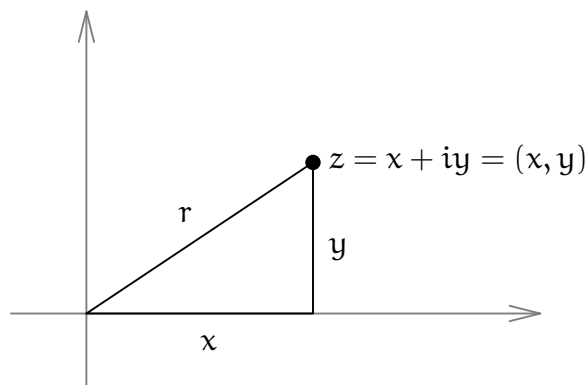


ABBILDUNG 7. Pythagoras:  $x^2 + y^2 = r^2$

Betrag 1 sind mithin genau die Punkte auf dem Einheitskreis um den Ursprung.

**Bemerkung 4.12** (Polarkoordinaten und die Deutung der Multiplikation)

Zur geometrischen Interpretation der Multiplikation verwenden wir den Absolutbetrag  $r := |z|$  einer komplexen Zahl  $z$ . Für  $z \neq 0$  ist  $z' := \frac{z}{|z|}$  normiert auf Länge eins, und es gilt

$$z = |z| \cdot z' = r \cdot z'.$$

D.h.  $z$  ist das Produkt eines Vektors von Länge eins mit einer nicht-negativen reellen Zahl. Dabei ist  $z'$  vollständig durch den Winkel  $\alpha \in [0, 2\pi)$  bestimmt, den  $z'$  mit der  $x$ -Achse einschließt, nämlich

$$z' = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha).$$

Also ist jede komplexe Zahl  $z \neq 0$  eindeutig durch ihren Betrag und den Winkel  $\alpha$  bestimmt. Wir nennen

$$\arg(z) := \alpha$$

das *Argument* von  $z$  und das Paar

$$(r, \alpha) = (|z|, \arg(z))$$

die *Polarkoordinaten* von  $z$ .

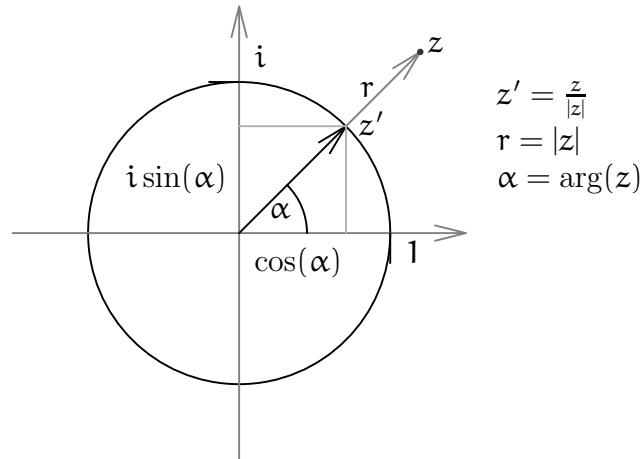


ABBILDUNG 8. Polarkoordinaten von  $z = r \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))$

Aus der Schule sind u.U. die folgenden beiden Additionstheoreme für den Sinus und den Cosinus bekannt:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \quad (4)$$

und

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta). \quad (5)$$

Betrachten wir zunächst die Multiplikation von zwei komplexen Zahlen  $z = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)$  und  $w = \cos(\beta) + i \cdot \sin(\beta)$  vom Betrag 1:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)) \cdot (\cos(\beta) + i \cdot \sin(\beta)) \\ &= (\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)) + i \cdot (\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)) \\ &\stackrel{(4),(5)}{=} \cos(\alpha + \beta) + i \cdot \sin(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Die beiden Zahlen werden also multipliziert, indem man die Argumente addiert.

Für das Produkt zweier beliebiger komplexer Zahlen  $z = |z| \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))$  und  $w = |w| \cdot (\cos(\beta) + i \cdot \sin(\beta))$  gilt dann analog

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot (\cos(\alpha + \beta) + i \cdot \sin(\alpha + \beta)),$$

die Argumente werden addiert und die Beträge multipliziert (siehe Abbildung 9).

In Polarkoordinaten könnte man dies schreiben als

$$(r, \alpha) \cdot (s, \beta) = (r \cdot s, \alpha + \beta).$$

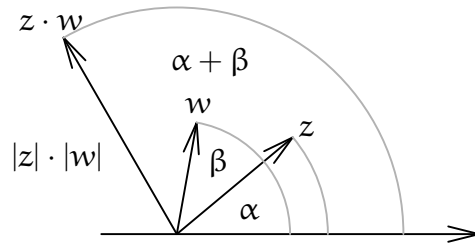


ABBILDUNG 9. Multiplikation zweier komplexer Zahlen

Wir wollen nun den folgenden Kapiteln etwas vorgreifen und die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus sowie die Exponentialfunktion verwenden. Zwischen diesen Funktionen stellt sich der folgende Zusammenhang heraus:

$$\cos(\alpha) + i \sin(\alpha) = e^{i\alpha}.$$

Damit erhält man für die Polarkoordinatendarstellung einer komplexen Zahl  $z$  die noch kürzere Darstellung

$$z = |z| \cdot e^{i \cdot \arg(z)}.$$

Damit ist es dann auch einfach, zu zeigen, daß nicht nur die Zahl  $-1$  eine Quadratwurzel besitzt, sondern daß in der Tat jede komplexe Zahl  $z$  beliebige  $n$ -te Wurzel besitzt:

$$a = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{\frac{i \cdot \arg(z)}{n}}$$

genügt der Gleichung

$$a^n = z,$$

wenn  $2 \leq n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \neq z \in \mathbb{C}$  und  $\sqrt[n]{|z|} \in \mathbb{R}$  die eindeutig bestimmte positive  $n$ -te Wurzel der reellen Zahl  $|z|$  ist; d.h.  $a$  ist eine  $n$ -te Wurzel aus  $z$ .

**Beispiel 4.13**

Zur Ermittlung von  $\alpha = \arg(z)$  für  $z = i - 1$  betrachten wir die Zahl  $\frac{z}{|z|} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$  vom Betrag 1, für die gilt

$$\frac{z}{|z|} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha),$$

d.h.  $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  und  $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , also  $\alpha = \frac{3}{4}\pi$ .

**Aufgabe 4.14**

Bestimme für die folgenden komplexen Zahlen den Realteil, den Imaginärteil, das Argument, den Betrag, das komplex Konjugierte und das multiplikative Inverse:

$$z = \frac{4i}{1+i} \quad \text{bzw.} \quad w = \frac{(2+2i)^7}{(1-i)^3}.$$

**Aufgabe 4.15**

Berechne für die komplexen Zahlen  $z = 1 - i$  und  $w = 1 + 3i$  die Zahl

$$\frac{z}{\overline{w} - z^2}$$

**Aufgabe 4.16**

Eine komplexe Zahl  $0 \neq z \in \mathbb{C}$  habe das Argument  $\alpha$  und den Betrag  $r$ . Bestimme  $\operatorname{Re}(z)$ ,  $\operatorname{Im}(z)$ ,  $\bar{z}$ ,  $z^{-1}$  und  $z^n$  für  $n \in \mathbb{N}$ .

**Aufgabe 4.17**

Skizziere in der komplexen Zahlenebene die Mengen

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 1\}$$

und

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| = |z - 1|\}$$

sowie

$$C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i - 1| < 2\}.$$

**Aufgabe 4.18**

Bestimme alle komplexen Zahlen, die der Gleichung

$$\frac{z-3}{z-i} + \frac{z-4+i}{z-1} = 2 \cdot \frac{-3+2i}{z^2 - (1+i) \cdot z + i}$$

genügen.

**§ 5 Der Fundamentalsatz der Algebra****Bemerkung 5.1** (Polynomfunktionen)

In der Schule betrachtet untersucht man in der Analysis das Verhalten von Funktionen. Dabei sind die Polynomfunktionen eine der wichtigsten, weil einfachsten Klassen von Funktionen. Sie sind durch Funktionsvorschriften vom Typ

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$$

mit bekannten Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_n$  gegeben, wobei wir  $\deg(f) := n$  den Grad der Polynomfunktion nennen, wenn  $a_n \neq 0$ . Z.B.:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

Ein der typischen Fragen, die man dabei untersucht, ist die nach den Nullstellen der Funktion. In obigem Beispiel würde man versuchen, die Gleichung

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

zu lösen. Solche Gleichungen müssen in  $\mathbb{R}$  keine Lösung besitzen, wie wir für das Beispiel

$$x^2 + 1 = 0$$

im Abschnitt über die komplexen Zahlen bereits gesehen haben. D.h. die Polynomfunktion mit der Vorschrift

$$f(x) = x^2 + 1$$

hat in  $\mathbb{R}$  keine Nullstelle. Wir haben im Kapitel über die komplexen Zahlen aber auch gesehen, daß diese Polynomfunktion in  $\mathbb{C}$  sehr wohl eine Nullstelle besitzt, nämlich  $x = i$ . Wie ist das für kompliziertere Polynomfunktionen?

**Satz 5.2** (Fundamentalsatz der Algebra)

Jede Polynomfunktion vom Grad  $n \geq 1$  mit komplexen Koeffizienten hat eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ .

**Bemerkung 5.3** (Polynomdivision)

Nullstellen einer Polynomfunktion kann man mit dem aus der Schule bekannten Verfahren der Polynomdivision als *Linearfaktoren* abspalten. Was das bedeutet, zeigen wir zunächst am Beispiel  $f(x) = x^3 - 1$  mit der Nullstelle  $x = 1$ :

$$\begin{array}{r} (x^3 - 1) : (x - 1) = x^2 + x + 1. \\ \underline{x^3 - x^2} \phantom{+ 1} \\ \phantom{x^3 - } x^2 - x \phantom{+ 1} \\ \underline{\phantom{x^3 - } x^2 - x} \phantom{+ 1} \\ \phantom{x^3 - } \phantom{x^2 - } x - 1 \\ \underline{\phantom{x^3 - } \phantom{x^2 - } x - 1} \\ \phantom{x^3 - } \phantom{x^2 - } \phantom{x - } - \end{array}$$

Die Nullstelle  $x = 1$  läßt sich also als Linearfaktor  $x - 1$  abspalten:

$$f(x) = x^3 - 1 = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1).$$

Allgemein gilt, ist  $a$  eine Nullstelle der Polynomfunktion  $f$  vom Grad  $n$ , so gibt es eine Polynomfunktion  $g$  vom Grad  $n - 1$ , so daß

$$f(x) = (x - a) \cdot g(x)$$

für alle  $x$  gilt.

Ist  $n - 1$  mindestens 1, so besitzt auch  $g$  nach dem Fundamentalsatz der Algebra wieder eine Nullstelle, die man als Linearfaktor abspalten kann. Fährt man in dieser Weise fort, so kann man die Polynomfunktion  $f$  als Produkt von Linearfaktoren schreiben. Man erhält damit die folgende allgemeine Aussage des Fundamentalsatzes der Algebra.

**Korollar 5.4** (Fundamentalsatz der Algebra)

Jede Polynomfunktion vom Grad  $n \geq 1$  mit komplexen Koeffizienten läßt sich als Produkt von Linearfaktoren schreiben.

**Bemerkung 5.5**

Die Aussage des Fundamentalsatzes ist eine reine Existenzaussage, d.h. der Satz garantiert uns, daß es die Nullstelle gibt. Er sagt uns im konkreten Beispiel überhaupt nichts darüber aus, wie wir sie finden können!

Das hat seinen guten Grund, es ist i.a. unmöglich, die Nullstellen exakt zu berechnen. Wir wollen uns die Situation für kleine Grade genauer anschauen.

Hat die Polynomfunktion Grad 1, ist also von der Form  $f(x) = ax + b$ , so ist  $x = -\frac{b}{a}$  die einzige Nullstelle von  $f$ . In diesem Fall können wir die Nullstelle also exakt angeben.

Hat die Polynomfunktion Grad 2, so ist sie von der Form

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

und es gilt:

$$f(x) = 0 \iff x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0.$$

Dieser Gleichung versuchen wir durch quadratische Ergänzung beizukommen:

$$0 = x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right).$$

Dies können wir umformen zu:

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Wir brauchen nun nur noch auf beiden Seiten die Quadratwurzeln zu ziehen und erhalten somit

$$x + \frac{b}{a} = \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

und damit

$$x = -\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}. \quad (6)$$

Wir müssen also nur noch die Quadratwurzel aus  $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$  berechnen und haben die beiden Nullstellen der Polynomfunktion gefunden. Wie man Quadratwurzeln berechnet, haben wir aber ganz am Ende von Bemerkung 4.12 gezeigt. Wir sind also auch hier wieder in der Lage, die Nullstellen exakt auszurechnen. ... Ah, Vorsicht! Die schöne Formel

$$\sqrt{z} = \pm \sqrt{|z|} \cdot e^{i \cdot \frac{\arg(z)}{2}}$$

verschleiert ein wenig, daß wir i.a. weder die Quadratwurzel der reellen Zahl  $|z|$  noch das Argument von  $z$  exakt bestimmen können!

Schon die Nullstellen von Polynomfunktionen zweiten Grades kann man i.a. nur noch näherungsweise bestimmen, und die obige Formel (6) täuscht darüber ein wenig hinweg. Nichtsdestotrotz ist die Formel oder besser, die quadratische Ergänzung als Methode, die Formel herzuleiten, wichtig und sollte geübt werden.

**Bemerkung 5.6** (Rationale Nullstellen)

Die komplexen Zahlen sind toll, weil Polynomfunktionen stets Nullstellen in  $\mathbb{C}$  haben, aber man kann sie in aller Regel halt nicht exakt angeben. In gewisser Weise sind die rationalen Zahlen besser, was das betrifft. Wenn wir mit einer Polynomfunktion

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

starten, deren Koeffizienten ganze Zahlen sind, so kann man alle Nullstellen bestimmen, die rationale Zahlen sind. Der allgemeine Algorithmus sprengt den Rahmen des Vorkurses, aber wenn man Kandidaten für eine Nullstelle  $q = \frac{a}{b}$  sucht, sollte

man beachten, daß  $\mathbf{b}$  ein Teiler des sogenannten Leitkoeffizienten  $\mathbf{a}_n$  und  $\mathbf{a}$  ein Teiler des konstanten Terms  $\mathbf{a}_0$  sein muß.

**Beispiel 5.7** (Rationale Nullstellen)

Wenn die Polynomfunktion  $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$  eine rationale Nullstelle  $\mathbf{q} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$  haben soll, so muß  $\mathbf{a}$  ein Teiler von 1 und  $\mathbf{b}$  ein Teiler von 2 sein. Es müßte also

$$\mathbf{q} \in \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1} \right\}$$

in gelten. Die vier Zahlen kann man einfach testen und stellt fest, daß

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$$

gilt, daß also  $\mathbf{q} = \frac{1}{2}$  eine Nullstelle von  $f$  ist. Spaltet man diese mit Hilfe von Polynomdivision ab, so erhält man

$$f(x) = (2x^2 + 2) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot (x^2 + 1) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Die beiden Nullstellen der Polynomfunktion  $x^2 + 1$  kennen wir, so daß wir insgesamt

$$f(x) = 2 \cdot (x - i) \cdot (x + i) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

als Zerlegung von  $f$  in Linearfaktoren erhalten.

**Aufgabe 5.8**

Zerlege die Polynomfunktion  $f(x) = x^4 + x^3 + 2x - 4$  in Linearfaktoren.

**Aufgabe 5.9**

Bestimme Real- und Imaginärteil der Lösungen der beiden quadratischen Gleichungen

$$z^2 - 4iz + 4z - 8i = 0$$

und

$$z^2 + 2 \cdot (1 + i) \cdot z = 1 - 3i.$$

