Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2013/14, Blatt 1

Vorkurs Mathematik

Aufgaben zum Themenkomplex Zahlbereiche

1) Die natürlichen, die ganzen, die rationalen und die reellen Zahlen

Aufgabe 1: Kürze die folgenden rationalen Zahlen vollständig:

$$\frac{4}{8}, \quad -\frac{36}{42}, \quad \frac{-39}{81}, \quad \frac{15}{-25}.$$

Aufgabe 2: Ordne die folgenden rationalen Zahlen der Größe nach an:

$$\frac{9}{11}, \quad \frac{37}{45}, \quad \frac{121}{78}, \quad \frac{178}{222}, \quad \frac{76}{88}.$$

Aufgabe 3: Berechne die folgenden rationalen Zahlen:

$$\frac{18}{17}+\frac{9}{2}, \quad \frac{11}{5}\cdot\frac{7}{15}, \quad \frac{18}{17}-\frac{9}{2}, \quad \frac{11}{5}+\frac{7}{15}.$$

Aufgabe 4: Es seien $0 \neq a, b \in \mathbb{Z}$ zwei ganze Zahlen. Mit welchen der folgenden Zahlen stimmt $q = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ für jede Wahl von a und b überein:

$$r = \frac{1}{a-b}, \qquad s = \frac{ab}{a+b}, \qquad t = \frac{b-a}{ab}, \qquad u = \frac{a-b}{ab}.$$

Aufgabe 5: In einem elektrischen Netzwerk gilt für den Widerstand R zweier hintereinander geschalteter Widerstände R_1 und R_2 (siehe Abbildung 1)

$$R = R_1 + R_2.$$

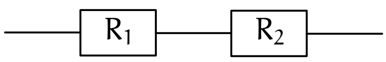

Abbildung 1: Hintereinander geschaltete Widerstände $R = R_1 + R_2$

Analog gilt für den Widerstand R zweier parallel geschalteter Widerstände R_1 und R_2 (siehe Abbildung 2)

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Gib eine Formel für den Widerstand R der Schaltung in Abbildung 3 in Form eines Bruches an.

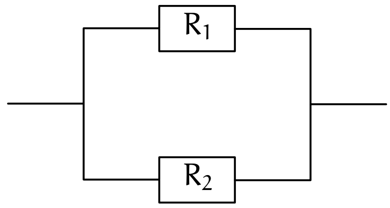

Abbildung 2: Parallel geschaltete Widerstände $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

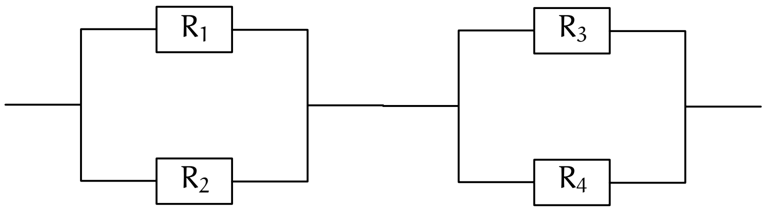

Abbildung 3: Berechne den Gesamtwiderstand der Schaltung.

Aufgabe 6: Rechne nach, daß die Menge $K = \{0, 1\}$ mit der in den folgenden Tabellen definierten Addition und Multiplikation ein Körper ist, d.h. den Körperaxiomen (A1-4), (M1-4) und (DG) genügt:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Zeige außerdem, daß K kein angeordneter Körper sein kann, d.h. es gibt keine Anordung der Zahlen 0 und 1 so, daß für je drei Zahlen $x, y, z \in K$ die folgenden Regeln gelten:

$$x < y \implies x + z < y + z$$

und

$$x < y,\ 0 < z \implies x \cdot z < y \cdot z.$$

Aufgabe 7: Schreibe die Menge

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; |x - 2| > 0 \text{ und } |x - 1| \leq 10 \right\}$$

als Vereinigung von Intervallen.

Aufgabe 8: Finde eine obere und eine untere Schranke für die Menge

$$A = \left\{ \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{6} \;\middle|\; x \in [-1, 1] \right\}$$

durch Abschätzen des Betrags

$$\left| \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{6} \right|.$$

Aufgabe 9: Bestimme Supremum, Infimum, Maximum und Minimum (sofern sie existieren) der folgenden Mengen:

a. $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; |x - 3| > 1 \right\} \cap \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 < 16 \right\}$.

b. $B = \left\{ n + \frac{(-1)^n}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$.

c. $C = \left\{ \frac{m+n}{m \cdot n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Aufgabe 10: Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen, so daß $\sup(A)$ und $\sup(B)$ existieren. Wir setzen

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Begründe, weshalb $\sup(A+B)$ existiert und $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$ gilt.

Aufgabe 11: Zeige, für je zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so daß $y < n \cdot x$ gilt.

Aufgabe 12: Zeige, für jede positive reelle Zahl $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ gibt es eine natürliche Zahl n, so daß $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Aufgabe 13: Zeige, zwischen je zwei verschiedenen reellen Zahlen liegt eine rationale.

Aufgabe 14: Wo liegt der Fehler beim folgenden Beweis für die Aussage $1 = 2$?

$$\begin{array}{lll}
 & x := 1 \text{ und } y := 2 & \\
\Longrightarrow & x + y = 3 & \mid \cdot (x - y) \\
\Longrightarrow & x^2 - y^2 = 3x - 3y & \mid + (y^2 - 3x) \\
\Longrightarrow & x^2 - 3x = y^2 - 3y & \mid + \frac{9}{4} \\
\Longrightarrow & x^2 - 3x + \frac{9}{4} = y^2 - 3y + \frac{9}{4} & \mid \text{Binomischer Lehrsatz} \\
\Longrightarrow & \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 & \mid \sqrt{\cdots} \\
\Longrightarrow & x - \frac{3}{2} = y - \frac{3}{2} & \mid + \frac{3}{2} \\
\Longrightarrow & x = y & \mid \text{Einsetzen von } x = 1, y = 2 \\
\Longrightarrow & 1 = 2 &
\end{array}$$

Aufgabe 15: Wo liegt der Fehler beim folgenden Beweis für die Aussage $1 = 2$?

$$\begin{array}{lll}
 & x := 1 & \mid \cdot x \\
\Longrightarrow & x^2 = x & \mid -1 \\
\Longrightarrow & x^2 - 1 = x - 1 & \mid \text{3. Binomische Formel} \\
\Longrightarrow & (x - 1) \cdot (x + 1) = x - 1 & \mid : (x - 1) \\
\Longrightarrow & x + 1 = 1 & \mid \text{Einsetzen von } x = 1 \\
\Longrightarrow & 2 = 1 &
\end{array}$$

Aufgabe 16: Zeige, zwei positive reelle Zahlen $x, y \in (0, \infty)$ erfüllen stets die Ungleichung

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2.$$

Für welche Werte von x und y gilt die Gleichheit?

2) Vollständige Induktion

Aufgabe 17: Zeige durch Induktion nach n, für $1 \neq q \in \mathbb{R}$ und $n \geq 0$ gilt stets

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Aufgabe 18: Zeige durch Induktion nach n, für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ gilt stets

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Aufgabe 19: Zeige durch Induktion nach n die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}.$$

Aufgabe 20: Zeige, daß Zahlen der Form $n^3 + 5n$ für $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar sind.

Aufgabe 21: Beweise die Pascalsche Gleichung

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

für nicht-negative ganze Zahlen $n, k \geq 0$ durch direktes Nachrechnen.

Aufgabe 22: Begründe, weshalb die folgende Gleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig ist:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 0.$$

3) Die komplexen Zahlen und der Fundamentalsatz der Algebra

Aufgabe 23: Bestimme für die folgenden komplexen Zahlen z den Realteil, den Imaginärteil, das Argument, den Betrag, das komplex Konjugierte und das multiplikative Inverse:

$$z = \frac{4i}{1+i} \quad \text{bzw.} \quad z = \frac{(2+2i)^7}{(1-i)^3}.$$

Aufgabe 24: Berechne für die komplexen Zahlen $z = 1 - i$ und $w = 1 + 3i$ die Zahl

$$\frac{z}{\overline{w} - z^2}$$

Aufgabe 25: Die Zahl $0 \neq z \in \mathbb{C}$ habe das Argument α und den Betrag r. Bestimme $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $\overline{z}$, z^{-1} und z^n für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 26: Skizziere in der komplexen Zahlenebene die Mengen

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = 1\}$$

und

$$B = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - i| = |z - 1|\right\}$$

sowie

$$C = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - i - 1| < 2\right\}.$$

Aufgabe 27: Bestimme alle komplexen Zahlen, die der Gleichung

$$\frac{z-3}{z-i} + \frac{z-4+i}{z-1} = 2 \cdot \frac{-1+2i}{z^2 - (1+i) \cdot z + i}$$

genügen.

Aufgabe 28: Zerlege die Polynomfunktion $f(x) = x^4 + x^3 + 2x - 4$ in Linearfaktoren.

Aufgabe 29: Bestimme Real- und Imaginärteil der Lösungen der beiden quadratischen Gleichungen

$$z^2 - 4iz + 4z - 8i = 0$$

und

$$z^2 + 2 \cdot (1+i) \cdot z = 1 - 2i.$$

Aufgabe 30: Zeige, daß eine Polynomfunktion vom Grad n in $\mathbb{C}$ höchstens n verschiedene Nullstellen haben kann.