Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Wintersemester 2013/14, Blatt 5

Vorkurs Mathematik

Aufgaben zu den Themenkomplexen Integralrechnung und Spezielle Funktionen

1) Integralrechnung

Aufgabe 1: Berechne die folgenden Integrale:

a. $\int_1^3 x^5 - 2 \, dx$.

b. $\int_0^\pi \sin(x) \, dx$.

c. $\int_0^\pi \cos(x) \, dx$.

d. $\int_2^2 (x^{120} + x^{13} - 9228x^7) dx$.

e. $\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \, dx$.

f. $\int_0^\pi \sin^2(x) \cdot \cos(x) \, dx$.

g. $\int_1^e \frac{1}{x \cdot (1+\ln(x))} \, dx$.

h. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos(x) \, dx$.

i. $\int_{-3}^4 |x| dx$.

j. $\int_y^2 (3x^2 + 7x + 17) dx$.

Aufgabe 2: Bestimme für die folgenden Funktionen jeweils eine Stammfunktion:

a. $f_1(x) = e^x + \sin(x)$.

b. $f_2(x) = e^{2x} + \frac{3}{1+x^2}$.

c. $f_3(x) = \frac{1}{x+2}$.

d. $f_4(x) = \frac{2x}{x^2+2}$.

e. $f_5(x) = x^2 \cdot e^x$.

f. $f_6(x) = e^{\cos(x)} \cdot \sin(x)$.

Aufgabe 3: Berechne den Flächeninhalt des von den Graphen von f und g eingeschlossenen Flächenstücks, für

a. $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 5, \quad g(x) = 2$.

b. $f(x) = x^3 + x^2 - x, \quad g(x) = 2x^2 + x$.

Aufgabe 4: Zeige, für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt die Gleichung

$$\int_0^a |x| \, dx = \frac{a \cdot |a|}{2}.$$

Aufgabe 5: Es sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar auf $[a, b]$ mit $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$. Begründe, weshalb dann

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M \cdot (b - a)$$

gilt. Nutze diese Ungleichung, um für folgende Integrale eine obere und eine untere Schranke anzugeben:

a. $\int_0^5 x^3 \sin(x) \, dx$.

b. $\int_0^1 \frac{1}{1+e^{x^2}} \, dx$.

c. $\int_2^4 \frac{e^x}{5-x} \, dx$.

Aufgabe 6: Es gilt $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Schreibe diesen Ausdruck mit Hilfe der geometrischen Reihe als Reihe und berechne durch gliedweise Integration eine Reihendarstellung für den Arcustangens. Wenn man dann noch $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ beachtet, so kann man eine Reihendarstellung für die Zahl π herleiten.

2) Spezielle Funktionen

Aufgabe 7: Zeige die folgenden Gleichungen für den Sinus und Cosinus:

$$\sin(x + \pi) = -\sin(x) \quad \text{und} \quad \cos(x + \pi) = -\cos(x).$$

Aufgabe 8: Rechne möglichst viele der im Skript zur Vorlesung im Abschnitt zu speziellen Funktionen angegebenen Eigenschaften der Exponentialfunktionen, des Logarithmus sowie der trigonometrischen Funktionen nach. Dabei dürfen neben ihren Definitionen auch die Ergebnisse früherer Kapitel sowie früherer Aufgaben verwendet werden.

Aufgabe 9: Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $f(1) = a > 0$. Zeige, dann ist $f = \exp_a$.

Aufgabe 10: [Additionstheoreme für Tangens und Arcustangens]

a. Zeige das folgende Additionstheorem für den Tangens:

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)},$$

wobei $x, y, x + y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ gelten soll.

b. Folgere daraus das folgende Additionstheorem für den Arcustangens:

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right).$$

c. Zeige die Gleichung

$$4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}.$$