

## Vorkurs Mathematik

### Aufgaben zum Themenkomplex Logik, Mengen und Abbildungen

#### 1) Logik

**Aufgabe 1:** Negiere die folgenden Aussagen:

- Jedes Auto, das am Samstag um 9:00 auf dem Parkplatz parkte, war rot.
- Mindestens ein Auto, das am Samstag um 9:00 auf dem Parkplatz parkte, war rot.
- Am Samstag um 9:00 parkten rote Autos auf dem Parkplatz.
- Es gibt keine größte ganze Zahl.
- Keine Regel ohne Ausnahme.

**Aufgabe 2:**

- Drücke die folgenden Aussagen in Worten aus und, falls eine Aussage falsch sein sollte, ersetze sie dabei durch ihre Negation.
  - $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : m = n + n,$
  - $\exists m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : (m \neq n) \wedge (m^n = n^m).$
- Drücke die folgenden Aussagen mit Hilfe von Quantoren aus:
  - Zwischen je zwei verschiedenen reellen Zahlen gibt es eine weitere reelle Zahl.
  - Es gibt keine größte Primzahl in den natürlichen Zahlen.

**Aufgabe 3:** Welche der folgenden Schlußfolgerungen ist korrekt?

- Falls es anfängt zu regnen, wird die Straße naß. Aber, da die Straße nicht naß werden wird, wird es auch nicht regnen.
- Einige Politiker sind ehrlich. Einige Frauen sind Politiker. Also sind einige weibliche Politiker ehrlich.

#### 2) Mengen

**Aufgabe 4:** Bestimme die folgende Menge von Punkten in der Zahlenebene  $\mathbb{C}$ :

$$M := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3| = 2 \cdot |z + 3|\}.$$

**Aufgabe 5:** Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichung in  $\mathbb{R}$  und in  $\mathbb{C}$ :

$$3x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x - 2 = 0$$

**Aufgabe 6:** Bestimme die folgende von reellen Zahlen als Vereinigung von Intervallen:

$$M := (\{x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| > 5\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 100\}) \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 3\}.$$

**Aufgabe 7:** Es seien  $M, N, P$  Mengen. Verifiziere die folgenden Rechenregeln mit Hilfe von Venn Diagrammen:

a. *Assoziativgesetze*

- $(M \cup N) \cup P = M \cup (N \cup P).$
- $(M \cap N) \cap P = M \cap (N \cap P).$

b. *Distributivgesetze*

- $M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P).$
- $M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P).$

c. *De Morgansche Regeln*

- $M \setminus (N \cap P) = (M \setminus N) \cup (M \setminus P).$
- $M \setminus (N \cup P) = (M \setminus N) \cap (M \setminus P).$

### 3) Abbildungen

**Aufgabe 8:** Untersuche ob die folgenden Abbildungen bijektiv sind und bestimme ggf. die Umkehrabbildung:

- $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 3x + 2$
- $f_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : x \mapsto 3x + 2$
- $f_3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (xy, x + 1)$
- $f_4 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (x - 2y, 2x + y)$

**Aufgabe 9:** Bestimme für die folgenden Abbildungen eine Umkehrabbildung:

- $f_1 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 4x + 1.$
- $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x \cdot |x|.$
- $f_3 : \mathbb{C} \setminus \{i\} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{z+i}{i-z}.$

**Aufgabe 10:** Seien  $L, M, N$  Mengen und  $f : L \rightarrow M, g : M \rightarrow N$  Abbildungen. Beweise oder widerlege - durch Gegenbeispiel - die folgenden Aussagen:

- Ist  $g \circ f$  bijektiv, so ist  $g$  bijektiv.
- Ist  $g \circ f$  bijektiv, so ist  $f$  bijektiv.

**Aufgabe 11:** Seien  $M, N$  Mengen,  $A_1, A_2 \subseteq M$  und  $B, B_1, B_2 \subseteq N$  Teilmengen und  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung. Beweise die folgenden Aussagen:

- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2).$
- $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2).$

Gib außerdem ein konkretes Beispiel dafür an, dass in b. keine Gleichheit gilt.