

## Vorkurs Mathematik

### Aufgaben zum Themenkomplex Folgen

**Aufgabe 1:** Bestimme für die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n = \frac{n-1}{n+1}$  eine Zahl  $n_\varepsilon$ , so daß  $|a_n - 1| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_\varepsilon$  gilt, wenn  $\varepsilon = \frac{1}{10}$  ist.

**Aufgabe 2:** Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein konvergente Folge. Ist dann  $(a_{n+1} - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  immer eine Nullfolge?

**Aufgabe 3:** Untersuche die folgenden Folgen auf ihr Konvergenzverhalten:

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n = \frac{n^3-2}{n^2}$ .
- $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $b_n = a_n - n + 3$ .
- $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $c_n = \frac{3n^3+n^2+2}{(2n+1) \cdot (n^3+1)}$ .

**Aufgabe 4:** Untersuche die folgenden Folgen auf ihr Konvergenzverhalten:

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n = \left( \frac{3^{n+1}+2^n}{3^{n+2}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $b_n = \left( \sqrt{n^2 + n} - n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $c_n = \sqrt[n]{1 - x^n}$  für  $x \in (-1, 1)$ .

**Aufgabe 5:** Was kann man über das Konvergenzverhalten der geometrischen Folge  $(x^n)_{n \geq 0}$  für  $x \in \mathbb{C}$  mit  $|x| = 1$  bzw.  $|x| > 1$  sagen?

**Aufgabe 6:** Zeige, sind  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folgen in  $\mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ , und ist  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  mit  $a_n \leq c_n \leq b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a.$$

**Aufgabe 7:** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen heißt  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *beschränkt*, wenn die Menge  $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  beschränkt ist.

Zeige, daß eine monoton wachsende (bzw. fallende) beschränkte Folge konvergent ist. Wie charakterisiert man ihren Grenzwert?

**Aufgabe 8:** Untersuche die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$a_n = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

hinsichtlich ihres Konvergenzverhaltens. Betrachte zunächst einige Folgenglieder und stelle eine Vermutung auf.

**Aufgabe 9:** [Heron-Verfahren zur Berechnung von Quadratwurzeln] Es sei  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  eine positive reelle Zahl. Wir setzen  $a_0 := 1$  und für  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir  $a_{n+1}$  durch die Rekursionsvorschrift

$$a_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \left( a_n + \frac{c}{a_n} \right) > 0.$$

Zeige mit Hilfe des Monotoniekriteriums für beschränkte Folgen, daß die Folge konvergiert und berechne ihren Grenzwert.

**Aufgabe 10:** Zeige, daß die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot (k+1)}$$

konvergiert und bestimme ihren Grenzwert. Schreibe dazu zunächst  $\frac{1}{k \cdot (k+1)}$  in der Form  $\frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$  für geeignete Zahlen A und B.

**Aufgabe 11:** Stimmt es, daß aus der Konvergenz einer Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der Form

$$a_n = \sum_{k=1}^n b_k$$

notwendigerweise folgt, daß  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge ist.

**Aufgabe 12:** Leite die folgenden Eigenschaften der Exponentialfunktion, des Sinus und des Cosinus aus ihrer Reihendarstellung bzw. der Gleichung  $\exp(ix) = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$  ab:

a. Für  $x, y \in \mathbb{K}$  gilt

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

b. Für  $x \in \mathbb{K}$  gelten

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

und

$$\cos(-x) = \cos(x).$$

Wir nennen den Sinus eine *ungerade* Funktion und den Cosinus eine *gerade*.

c. Für  $x \in \mathbb{K}$  gilt

$$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1.$$

d. Für  $x \in \mathbb{K}$  gilt

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^{ix} + e^{-ix})$$

und

$$\sin(x) = \frac{1}{2i} \cdot (e^{ix} - e^{-ix}).$$

e. Für zwei reelle Zahlen  $x, y \in \mathbb{R}$  gelten die *Additionstheoreme*

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$$

und

$$\sin(x + y) = \cos(x) \cdot \sin(y) + \sin(x) \cdot \cos(y).$$

f. Für eine reelle Zahl  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $|e^{ix}| = 1$ .