Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Vorkurs Mathematik

Aufgaben zu mehrdimensionaler Differential- und Integralrechnung

1) Mehrdimensionale Differentialrechnung

Aufgabe 1: Berechne den Gradienten und die Hesse-Matrix für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$:

a. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

b. $f(x, y, z) = 3x \cdot \exp(xz) + y^3$.

c. $f(x, y, z) = x^2 y \cdot \cos(z)$.

Aufgabe 2: Berechne die Jacobi-Matrix für die folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$:

a. $f(x, y) = (x + 3y, xy, y^2 - x)^t$.

b. $f(x, y) = \big(\exp(xy), x^2 y - 1, y\big)^t$.

Aufgabe 3: Für $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ als Multiplikation des Koordinatenvektors $(x_1, \ldots, x_n)^t$ mit A definiert. Berechne die Ableitung $Jf(x_1, \ldots, x_n)$.
Alternativ kann man die Aufgabe für die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

lösen.

Aufgabe 4: Bestimme alle lokalen Extrema und Sattelpunkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y)^t \longmapsto x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^3 - 2xy^2 + x^2 + y^2.$$

Aufgabe 5: Bestimme alle lokalen Extrema und Sattelpunkte der folgenden Funktion

$$f : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y)^t \mapsto \frac{1}{x} - \frac{9}{y} + x - y.$$

Aufgabe 6: Zeige, eine partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $Jf(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist konstant.

2) Mehrdimensionale Integralrechnung

Aufgabe 7: Berechne das folgende Integral:

$$\int_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \sin(x+y)\ d(x,y)$$

Aufgabe 8: Berechne das folgende Integral:

$$\int_{[0,1]\times[0,1]\times[0,1]} \frac{x^3y^2}{1+z^2}\ d(x,y,z).$$

Aufgabe 9: Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ der Normalbereich im ersten Quadranten zwischen der Geraden $y = x$ und der Parabel $y = x^2$. Berechne $\int_B xy\, d(x,y)$.

Aufgabe 10: Berechne das Volumen des Tetraeders, der von den drei Koordinatenachsen und der Ebene $z = 2 - 2x - y$ begrenzt wird.

Aufgabe 11: Berechne die Determinante der Ableitung der Zylinderkoordinatenabbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (r,\theta,z) \mapsto \big(r\cdot\cos(\theta), r\cdot\sin(\theta), z\big)$$

und zeige, daß sie auf der Menge

$$Q = [0,\infty) \times [0,2\pi] \times \mathbb{R}$$

ohne den Rand stets positiv ist und daß φ dort eine Umkehrabbildung besitzt. Verwende dann den Transformationssatz, um das Volumen des Zylinders

$$Z = \{(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq r_0^2, 0 \leq z \leq z_0\}$$

zu berechnen.

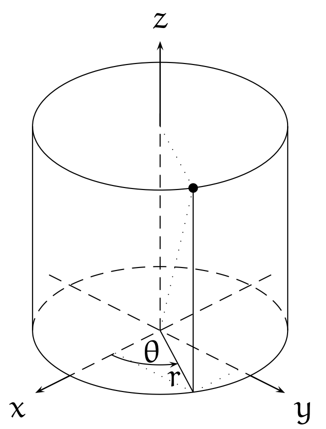

Abbildung 1: Zylinderkoordinaten