Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2021/22, Blatt 0

Vorkurs Mathematik

Aufgaben zum Themenkomplex Logik, Mengen und Abbildungen

1) Logik

Aufgabe 1: Negiere die folgenden Aussagen:

a. Jedes Auto, das am Samstag um 9:00 auf dem Parkplatz parkte, war rot.

b. Mindestens ein Auto, das am Samstag um 9:00 auf dem Parkplatz parkte, war rot.

c. Am Samstag um 9:00 parkten rote Autos auf dem Parkplatz.

d. Es gibt keine größte ganze Zahl.

e. Keine Regel ohne Ausnahme.

Aufgabe 2:

a. Drücke die folgenden Aussagen in Worten aus und, falls eine Aussage falsch sein sollte, ersetze sie dabei durch ihre Negation.

   (a) $\forall\, m \in \mathbb{N},\ \exists\, n \in \mathbb{N} :\ m = n + n,$

   (b) $\exists\, m \in \mathbb{N},\ \exists\, n \in \mathbb{N} :\ (m \neq n) \wedge (m^n = n^m).$

b. Drücke die folgenden Aussagen mit Hilfe von Quantoren aus:

   (a) Zwischen je zwei verschiedenen reellen Zahlen gibt es eine weitere reelle Zahl.

   (b) Es gibt keine größte Primzahl in den natürlichen Zahlen.

Aufgabe 3: Welche der folgenden Schlußfolgerungen ist korrekt?

a. Falls es anfängt zu regnen, wird die Straße naß. Aber, da die Straße nicht naß werden wird, wird es auch nicht regnen.

b. Einige Politiker sind ehrlich. Einige Frauen sind Politiker. Also sind einige weibliche Politiker ehrlich.

2) Mengen

Aufgabe 4: Bestimme die folgende Menge von Punkten in der Zahlenebene $\mathbb{C}$:

$$M := \big\{ z \in \mathbb{C} \;\big|\; |z-3| = 2 \cdot |z+3| \big\}.$$

Aufgabe 5: Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichung in $\mathbb{R}$ und in $\mathbb{C}$:

$$3x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x - 2 = 0$$

Aufgabe 6: Bestimme die folgende von reellen Zahlen als Vereinigung von Intervallen:

$$M := \left(\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |x+1| > 5\right\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 100\}\right) \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 3\}.$$

Aufgabe 7: Es seien M, N, P Mengen. Verifiziere die folgenden Rechenregeln mit Hilfe von Venn Diagrammen:

a. *Assoziativgesetze*

- $(M \cup N) \cup P = M \cup (N \cup P)$.
- $(M \cap N) \cap P = M \cap (N \cap P)$.

b. *Distributivgesetze*

- $M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$.
- $M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$.

c. *De Morgansche Regeln*

- $M \setminus (N \cap P) = (M \setminus N) \cup (M \setminus P)$.
- $M \setminus (N \cup P) = (M \setminus N) \cap (M \setminus P)$.

3) Abbildungen

Aufgabe 8: Untersuche ob die folgenden Abbildungen bijektiv sind und bestimme ggf. die Umkehrabbildung:

a. $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \ x \longmapsto 3x + 2$

b. $f_2 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : \ x \longmapsto 3x + 2$

c. $f_3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ (x, y) \longmapsto (xy, x + 1)$

d. $f_4 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ (x, y) \longmapsto (x - 2y, 2x + y)$

Aufgabe 9: Bestimme für die folgenden Abbildungen eine Umkehrabbildung:

a. $f_1 : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : \ x \mapsto x^2 - 4x + 1$.

b. $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \ x \mapsto x \cdot |x|$.

c. $f_3 : \mathbb{C} \setminus \{i\} \longrightarrow \mathbb{C} : \ z \mapsto \frac{z+i}{i-z}$.

Aufgabe 10: Seien L, M, N Mengen und $f : L \longrightarrow M$, $g : M \longrightarrow N$ Abbildungen. Beweise oder widerlege - durch Gegenbeispiel - die folgenden Aussagen:

a. Ist $g \circ f$ bijektiv, so ist g bijektiv.

b. Ist $g \circ f$ bijektiv, so ist f bijektiv.

Aufgabe 11: Seien M, N Mengen, $A_1, A_2 \subseteq M$ und $B, B_1, B_2 \subseteq N$ Teilmengen und $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung. Beweise die folgenden Aussagen:

a. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

b. $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.

Gib außerdem ein konkretes Beispiel dafür an, dass in b. keine Gleichheit gilt.