Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2021/22, Blatt 2

# Vorkurs Mathematik

## Aufgaben zum Themenkomplex Folgen

**Aufgabe 1:** Bestimme für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ eine Zahl $n_\varepsilon$, so daß $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt, wenn $\varepsilon = \frac{1}{10}$ ist.

**Aufgabe 2:** Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein konvergente Folge. Ist dann $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ immer eine Nullfolge?

**Aufgabe 3:** Untersuche die folgenden Folgen auf ihr Konvergenzverhalten:

a. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n^3-2}{n^2}$.

b. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = a_n - n + 3$.

c. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \frac{3n^3+n^2+2}{(2n+1)\cdot(n^3+1)}$.

**Aufgabe 4:** Untersuche die folgenden Folgen auf ihr Konvergenzverhalten:

a. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(\frac{3^{n+1}+2^n}{3^n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

c. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \sqrt[n]{1-x^n}$ für $x \in (-1, 1)$.

**Aufgabe 5:** Was kann man über das Konvergenzverhalten der geometrischen Folge $(x^n)_{n\geq 0}$ für $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| = 1$ bzw. $|x| > 1$ sagen?

**Aufgabe 6:** Zeige, sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$, und ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

**Aufgabe 7:** Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt*, wenn die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.
Zeige, daß eine monoton wachsende (bzw. fallende) beschränkte Folge konvergent ist. Wie charakterisiert man ihren Grenzwert?

**Aufgabe 8:** Untersuche die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

hinsichtlich ihres Konvergenzverhaltens. Betrachte zunächst einige Folgenglieder und stelle eine Vermutung auf.

**Aufgabe 9:** [Heron-Verfahren zur Berechnung von Quadratwurzeln] Es sei $c \in \mathbb{R}_{>0}$ eine positive reelle Zahl. Wir setzen $a_0 := 1$ und für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $a_{n+1}$ durch die Rekursionsvorschrift

$$a_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) > 0.$$

Zeige mit Hilfe des Monotoniekriteriums für beschränkte Folgen, daß die Folge konvergiert und berechne ihren Grenzwert.

**Aufgabe 10:** Zeige, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)}$$

konvergiert und bestimme ihren Grenzwert. Schreibe dazu zunächst $\frac{1}{k\cdot(k+1)}$ in der Form $\frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$ für geeignete Zahlen $A$ und $B$.

**Aufgabe 11:** Stimmt es, daß aus der Konvergenz einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Form

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

notwendigerweise folgt, daß $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

**Aufgabe 12:** Leite die folgenden Eigenschaften der Exponentialfunktion, des Sinus und des Cosinus aus ihrer Reihendarstellung bzw. der Gleichung $\exp(ix) = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$ ab:

a. Für $x, y \in \mathbb{K}$ gilt

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

b. Für $x \in \mathbb{K}$ gelten

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

und

$$\cos(-x) = \cos(x).$$

Wir nennen den Sinus eine *ungerade* Funktion und den Cosinus eine *gerade*.

c. Für $x \in \mathbb{K}$ gilt

$$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1.$$

d. Für $x \in \mathbb{K}$ gilt

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

und

$$\sin(x) = \frac{1}{2i} \cdot \left(e^{ix} - e^{-ix}\right).$$

e. Für zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gelten die *Additionstheoreme*

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$$

und

$$\sin(x + y) = \cos(x) \cdot \sin(y) + \sin(x) \cdot \cos(y).$$

f. Für eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt $|e^{ix}| = 1$.