Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2021/22, Blatt 4

Vorkurs Mathematik

Aufgaben zum Themenkomplex Differenzierbarkeit und Ableitungen

Aufgabe 1: Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

a. $f(x) = \cos^2(x) \cdot \sin^2(x)$.

b. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

c. $f(x) = (x^3 + x)^6$.

d. $f(x) = \cos(\sin(x))$.

Aufgabe 2: Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen $f : (a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.

a. $f(x) = x \cdot \ln(x)$ mit $a = 0$.

b. $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ mit $a = 0$.

c. $f(x) = \ln\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$ mit $a = 1$.

d. $f(x) = \frac{x^2+4}{x-4}$ mit $a = 4$.

e. $f(x) = \sqrt{e^{\cos(\sqrt{x})}}$ mit $a = 0$.

Aufgabe 3: Berechne die Ableitungen des Cosinus Hyperbolicus

$$\cosh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

und des Sinus Hyperbolicus

$$\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Aufgabe 4: Eine Funktion, deren Abbildungsvorschrift

$$f : (-r, r) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$$

durch eine Reihe gegeben ist, ist differenzierbar und für die Ableitung gilt

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot x^{k-1}.$$

Verwende diese Tatsache und die Reihendarstellung der Exponentialfunktion, des Sinus und des Cosinus, um die Ableitungsregeln für diese Funktionen zu verifizieren.

Aufgabe 5: Verifiziere die Ableitungsregeln für den Logarithmus, den Arcustangens und den Arcussinus mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion.

Aufgabe 6: Begründe, daß eine Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ konstant sein muß, wenn sie auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$ ist.

Aufgabe 7: Bestimme alle Extrema der Funktion

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto (1 - x) \cdot \sqrt{1 + 9x^2}.$$

Aufgabe 8: Bestimme die Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^4 - 5x^2}{4 \cdot (x - 1)^3}.$$

Untersuche die Funktion hinsichtlich Monotonie auf dem Intervall $(1, \infty)$.

Aufgabe 9: Berechne die folgenden Grenzwerte:

a. $\lim_{x \to \pi} \frac{\cos(x)+1}{x^2 - \pi^2}$ mit $x < \pi$.

b. $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right)$ mit $x > 1$.

c. $\lim_{x \to 0} x^x$ mit $x > 0$.

Aufgabe 10: Finde einen Näherungswert für die Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 + x^2 - 7x - 7$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens.

Aufgabe 11: Finde einen Näherungswert für die Nullstelle der Funktion $f(x) = x^{15} - 2$ im Intervall $[1, 2]$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens.

Aufgabe 12: Wie muß man die reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ wählen, daß die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-3}, & \text{für } x \leq 2, \\ ax^2 + 2x + b, & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

differenzierbar wird?

Aufgabe 13: Kann man $a \in \mathbb{R}$ so wählen, daß die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wächst?

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{ax}{x-3} & \text{wenn } x > 3 \\ 2x + a & \text{wenn } x \leq 3 \end{cases}$$