Vorkurs Mathematik

Aufgaben zu Matrizen, linearen Gleichungssystemen und Determinanten

1) Matrizen

Aufgabe 1: Berechne die folgenden Summen von Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: Welche der folgenden Matrizen können in welcher Reihenfolge miteinander multipliziert werden? Berechne ggf. das Matrixprodukt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: Berechne für jede der Matrizen in Aufgabe 2 eine reduzierte Zeilen-Stufen-Form.

Aufgabe 4: Berechne eine reduzierte Zeilen-Stufen-Form der folgenen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -7 & 10 & -1 \\ -2 & 4 & -7 & 2 \\ 3 & -5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

Aufgabe 5: Berechne den Rang der folgenden Matrix in Abhängigkeit von a und b:

$$\begin{pmatrix} 0 & b & b & b \\ a & 0 & b & b \\ a & a & 0 & b \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 4, \mathbb{R}).$$

Aufgabe 6: Bestimme die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 7: Es seien $x = (x_1, \ldots, x_n)^t, y = (y_1, \ldots, y_n)^t \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren mit $x \neq 0 \neq y$. Zeige, daß die Matrix

$$A = x \circ y^t = (x_i \cdot y_j)_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$$

Rang 1 hat.

Aufgabe 8: Gilt für Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ stets $A \circ B = B \circ A$? Beweise dies oder finde ein Gegenbeispiel.

2) Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 9: Berechne die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 10: Berechne die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems, sofern es lösbar ist:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 6y & + & 2z & = & 4 \\ 2x & - & 2y & - & z & = & 2 \\ 3x & - & 4y & - & 2z & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 11: Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & & & z & = & ab \\ -2x & + & by & + & az & = & -b \\ & & by & + & (a+1)z & = & b \end{array}$$

außer $(b, 1, 0)$ noch weitere Lösungen. Bestimme sie.

Aufgabe 12: Bestimme die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$ in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & ty & + & z & = & 1 \\ tx & + & ty & + & z & = & 1+t \end{array}$$

Für Werte von t für die das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung besitzt, verifiziere diese mit Hilfe der Camerschen Regel.

Aufgabe 13: Es seien $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Zeige, ist $c \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des (LGS) $Ax = b$, so ist gilt

$$\text{Lös}(A, b) = \{c + y \mid y \in \text{Lös}(A, 0)\}.$$

3) Determinanten

Aufgabe 14: Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 23 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 15: Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren $x = (1,3)^t$ und $y = (2,-4)^t$ in der Ebene aufgespannt wird.

Aufgabe 16: Überprüfe, welche der folgenden Matrizen invertierbar ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 17: Berechne das charakteristische Polynom für die Matrizen in Aufgabe 16.

Aufgabe 18: Berechne die Eigenwerte der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 19: Überprüfe, ob die folgenden symmetrischen Matrizen positiv definit sind:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 20: Zeige, enthält eine Matrix eine Nullzeile oder zwei gleiche Zeilen, ist ihre Determinante 0.

Aufgabe 21: Haben $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ und A^t stets die gleichen Eigenwerte? Beweise dies oder finde ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 22: Es seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ und A sei invertierbar. Zeige, daß B und $A^{-1} \circ B \circ A$ die gleichen Eigenwerte haben.