Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2008, Blatt 2

Elementare Zahlentheorie

Abgabetermin: Donnerstag, 01/05/2008, 12:00

Aufgabe 5: Ist $n \in \mathbb{Z}$ mit $n > 4$ keine Primzahl, so gilt $n \mid (n-1)!$.

Aufgabe 6: Für eine positive ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}_{>0}$ bezeichnen wir mit

$$\tau(z) = \left|\left\{d \in \mathbb{Z}_{>0} \;\middle|\; d \mid z\right\}\right|$$

die Anzahl der positiven Teiler von z, und mit

$$P(z) = \prod_{\substack{1 \leq d \leq z \\ d \mid z}} d$$

das Produkt aller positiven Teiler. Zeige

$$\tau(z) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \big(n_p(z) + 1\big)$$

und

$$P(z) = z^{\frac{\tau(z)}{2}}.$$

Aufgabe 7: Es seien $c_0, c_1, c_2, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ mit $\operatorname{ggt}(c_1, c_2) \mid c_0$ und $\operatorname{ggt}(c_1, c_2) = a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2$. Zeige, genau dann ist $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$ eine Lösung der diophantischen Gleichung

$$c_0 = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2,$$

wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so daß

$$z_1 = \frac{c_0 \cdot a_1}{\operatorname{ggt}(c_1, c_2)} + \frac{c_2 \cdot k}{\operatorname{ggt}(c_1, c_2)} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{c_0 \cdot a_2}{\operatorname{ggt}(c_1, c_2)} - \frac{c_1 \cdot k}{\operatorname{ggt}(c_1, c_2)}.$$

Aufgabe 8:

a. Überprüfe, ob die diophantische Gleichung

$$102 = 90 \cdot x_1 + 120 \cdot x_2 + 108 \cdot x_3$$

lösbar ist und gib gegebenenfalls eine Lösung an.

b. Ein Straßenverkäufer verkauft Luftballons, kleine zu 98 Cent das Stück und große zu $1,58$ Euro. Am Abend hat er $170,28$ Euro in der Tasche und von den je 100 kleinen und großen Ballons, die er dabei hatte, ist ein großer Teil verkauft. Wieviele Ballons von welcher Größe hat er verkauft?