Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Sommersemester 2008, Blatt 3

Elementare Zahlentheorie

Abgabetermin: Donnerstag, 22/05/2008, 12:00

Aufgabe 9: Zeige, es gibt keine positiven Zahlen $x, y, z \in \mathbb{Z}_{>0}$, so daß $x^4 + y^4 = z^2$.

Hinweis, man betrachte ein solches Tripel mit *minimalem* z und wende zweimal den Satz zur Klassifikation der pythagoreischen Zahlentripel an. Wenn das Produkt zweier teilerfremder Zahlen eine Quadratzahl ist, was bedeutet das für die beiden Faktoren?

Aufgabe 10: Die *Liouvillesche* λ*-Funktion* ist definiert durch

$$\lambda : \mathbb{Z}_{>0} \longrightarrow R : z \mapsto (-1)^{n_{\mathbb{P}}(z)}.$$

Zeige:

a. $\lambda \in \mathcal{Z}$, d.h. λ ist multiplikativ.

b. Für die Summatorfunktion $\Lambda = \lambda * e$ von λ gilt

$$\Lambda(z) = \sum_{\substack{1 \leq d \leq z \\ d \mid z}} \lambda(d) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \exists\, a \in \mathbb{Z} \,:\, z = a^2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 11: Es seien $p, q \in \mathbb{P}$ mit $p \neq q$, aber $p - 1 \mid q - 1$. Dann gilt

$$z^{q-1} \equiv 1 \pmod{pq}$$

für $z \in \mathbb{Z}_{>0}$ mit $\mathrm{ggt}(z, pq) = 1$.

Aufgabe 12: Zeige, daß jede Mersennsche Zahl $M_q = 2^q - 1$ mit $q \in \mathbb{P}$ eine Pseudoprimzahl zur Basis 2 ist, d.h.

$$M_q \mid \left(2^{M_q} - 2\right).$$