Fachbereich Mathematik — Sommersemester 2010, Blatt 1
Thomas Markwig — Michael Cuntz

Elementare Zahlentheorie

Abgabetermin: Donnerstag, 15/04/2010, 12:00

Die Aufgaben sind Präsenzaufgaben und brauchen nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 1:

a. Die ganzen Zahlen sind ein Hauptidealring, so daß die Begriffe ggT und kgV definiert sind.

   (a) Berechne einen Erzeuger für das Ideal $\langle 527, 1364\rangle$ in $\mathbb{Z}$.

   (b) Berechne $\mathrm{ggT}(527, 1364)$.

   (c) Berechne $\mathrm{kgV}(527, 1364)$.

b. Im Fundamentalsatz der elementaren Zahlentheorie haben wir die Vielfachheit $n_p(z)$ mit der eine Primzahl p eine ganze Zahl z teilt, eingeführt. Berechne $n_p(936)$ für alle Primzahlen $p \in \mathbb{P}$.

Aufgabe 2:

a. Berechne die Elemente in $\mathbb{Z}_{36}^*$.

b. Aus dem Chinesischen Restsatz wissen wir, daß $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. Gib den Isomorphismus an und rechne für jedes Element in $\mathbb{Z}_6$ das Bild aus. Verifiziere auf dem Weg, daß die Aussage stimmt.

c. Aus dem Chinesischen Restsatz wissen wir, daß die Gruppe $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{81}$ zyklisch ist. Gib einen Erzeuger für die Gruppe an.

d. Löse das folgende Kongruenzgleichungssystem in $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} x &\equiv 5 \pmod{81} \\ x &\equiv 7 \pmod{11} \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

a. Die Gruppe $U = \langle (1\ 2\ 3\ 4)\rangle \leq \mathbb{S}_4$ ist zyklisch der Ordnung 4 und mithin isomorph zu $\mathbb{Z}_4$. Gib einen Isomorphismus an.

b. Finde alle Untergruppen von U.

c. Finde alle Untergruppen der zyklischen Gruppen $(\mathbb{Z}_{28}, +)$ und $(\mathbb{Z}_{34}, +)$.

d. Es sei $\sigma = (1\ 2\ 5\ 4) \circ (3\ 6) \in \mathbb{S}_6$. Berechne die Ordnung von σ, σ^2 und σ^3, ohne σ^2 und σ^3 zu berechnen.

e. Berechne die Ordnung von $\overline{1}, \overline{7}, \overline{12} \in \mathbb{Z}_{36}$.

Aufgabe 4: Zeige, für $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt $\mathrm{ggt}(a, b) = \mathrm{ggt}(a + c \cdot b, b)$.