Fachbereich Mathematik — Sommersemester 2010, Blatt 2
Thomas Markwig — Michael Cuntz

Elementare Zahlentheorie

Abgabetermin: Donnerstag, 22/04/2010, 12:00

Aufgabe 5: Es seien $g, z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$. Wir nennen g einen *größten gemeinsamen Teiler* von $z_1, \ldots, z_k$, wenn

- $g \mid z_i$ für alle $i = 1, \ldots, k$ und
- für alle $h \in \mathbb{Z}$ mit $h \mid z_i$ für alle $i = 1, \ldots, k$ gilt $h \mid g$.

Mit $\mathrm{ggT}(z_1, \ldots, z_k)$ bezeichnen wir die Menge der größten gemeinsamen Teiler von $z_1, \ldots, z_k$.
Zeige:

a. $g \in \mathrm{ggT}(z_1, \ldots, z_k)$ genau dann, wenn $g \in \mathrm{ggT}\left(\mathrm{ggt}(z_1, z_2), z_3, \ldots, z_k\right)$.

b. $g \in \mathrm{ggT}(z_1, \ldots, z_k)$ genau dann, wenn $\langle g \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle z_1, \ldots, z_k \rangle_{\mathbb{Z}}$.

c. Ist $g \in \mathrm{ggT}(z_1, \ldots, z_k)$, so ist $\mathrm{ggT}(z_1, \ldots, z_k) = \{g, -g\}$.

d. $\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min\{n_p(z_1), \ldots, n_p(z_k)\}} \in \mathrm{ggT}(z_1, \ldots, z_k)$.

Aufgabe 6: Ist $f \in \mathbb{Z}[t]$ ein Polynom und sind $a, b, n \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen mit $a \equiv b \pmod{n}$, so ist $f(a) \equiv f(b) \pmod{n}$.

Aufgabe 7: Sind $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{Z}$ mit $z_i \equiv 1 \pmod{4}$, so gilt $z_1 \cdots z_n \equiv 1 \pmod{4}$.

Aufgabe 8: Ist $(p, p+2)$ ein Primzahlzwillingspaar mit $p \geq 5$, so ist $p \equiv 5 \pmod{6}$.