

Elementare Zahlentheorie

Abgabetermin: Donnerstag, 06/05/2010, 12:00

Aufgabe 9: Zeige, es gibt keine positiven Zahlen $x, y, z \in \mathbb{Z}_{>0}$, so daß $x^4 + y^4 = z^2$.

Hinweis: Man betrachte ein solches Tripel mit *minimalem* z und wende zweimal den Satz zur Klassifikation der pythagoreischen Zahlentripel an. Wenn das Produkt zweier teilerfremder Zahlen eine Quadratzahl ist, was bedeutet das für die beiden Faktoren?

Aufgabe 10:

a. *Unrealistische Übungsaufgabe:* Wir haben eine Backmischung gekauft, aber leider ist das Rezept nur teilweise lesbar, weil die Verpackung beschädigt ist: Zu ?? Bechern Mischung nimmt man ?? Eier und erhält einen Kuchen, der 1160g wiegt.

Was sind die richtigen Mengenangaben, wenn man annimmt, dass ein Ei 62g und ein Becher Backmischung 114g wiegen?

b. *“Realistische” freiwillige Zusatzaufgabe:* Folgendes amerikanische Rezept für Brownies ergibt einen Kuchen, der 1209g wiegt. Der Kuchen besteht aus den Zutaten: Eier, Öl, Zucker, Mehl, Kakao, Wasser und einer Prise Salz, wobei bis auf die Eier und das Salz alle Zutaten in $1/4$ Cups gemessen werden. Hierbei wiegen (in g)

| | | | | | | |
|----|--------|------------|----------|-----------|------------|------------|
| Ei | Cup Öl | Cup Zucker | Cup Mehl | Cup Kakao | Cup Wasser | Prise Salz |
| 60 | 220 | 236 | 116 | 84 | 240 | 1 |

Wieder wollen wir das genaue Rezept rekonstruieren:

(a) Angenommen das Rezept wurde uns mündlich erzählt, und wir wissen nur noch obige Daten, dass es 4 Eier sind, und dass der Zucker mit 2 Cups unter den Zutaten das größte Volumen hat. Wieviele mögliche Rezepte bleiben dann noch?

(b) Was ist das Rezept, wenn wir zusätzlich noch annehmen, dass man mehr Mehl als Kakao und genau $1/4$ Cup Wasser braucht? (Was man nicht erschliessen kann, ist, dass man den Kuchen 30 Minuten bei 350°F backen muss.)

Hinweis: Computer und Backofen sind zulässige Hilfsmittel.

Bitte wenden!

Aufgabe 11: Finden Sie ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq x < n$ mit den folgenden Eigenschaften (Computer oder Taschenrechner sind nicht erlaubt).

a. $n = 20, \quad 6x \equiv 16 \pmod{20}$

b. $n = 125, \quad x \equiv 2^{238476812384798234203} \pmod{125}$

c. $n = 15, \quad x \equiv 5^{1000000000000000000000000} \pmod{15}$

d. $n = 16, \quad 3^x \equiv 15 \pmod{17}$

Aufgabe 12: Die *Liouvillesche λ -Funktion* ist definiert durch

$$\lambda : \mathbb{Z}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad z \mapsto (-1)^{n_p(z)}.$$

Zeige:

a. $\lambda \in \mathcal{Z}$, d.h. λ ist multiplikativ.

b. Für die Summatorfunktion $\Lambda = \lambda * e$ von λ gilt

$$\Lambda(z) = \sum_{\substack{1 \leq d \leq z \\ d|z}} \lambda(d) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \exists a \in \mathbb{Z} : z = a^2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$