Fachbereich Mathematik — Sommersemester 2010, Blatt 4
Thomas Markwig — Michael Cuntz

Elementare Zahlentheorie

Abgabetermin: Donnerstag, 20/05/2010, 12:00

Aufgabe 13: Es sei φ die eulersche φ-Funktion. Welche Aussagen sind wahr? (Bitte begründen!)

a. Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt $a > b \Rightarrow \varphi(a) > \varphi(b)$.

b. Für alle $a \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi(2a) \geq \varphi(a)$.

c. Für alle $a \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi(a) \mid \varphi(a^2)$.

d. Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi(n+k) > \varphi(n)$.

Aufgabe 14:

a. Zeige, daß jede Mersennsche Zahl $M_q = 2^q - 1$ mit $q \in \mathbb{P}$ eine Pseudoprimzahl zur Basis 2 ist, d.h.
$$M_q \mid \left(2^{M_q} - 2\right).$$

b. Zeige: Sind für $m \in \mathbb{N}$ die Zahlen $6m+1$, $12m+1$ und $18m+1$ Primzahlen, so ist
$$n = (6m+1)(12m+1)(18m+1)$$
eine Carmichael-Zahl, d.h. n ist zusammengesetzt und $a^n \equiv a \pmod{n}$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggt}(a,n) = 1$.

Aufgabe 15: Zeige: Läßt sich eine natürliche Zahl n auf zwei verschiedene Arten als Summe zweier Quadratzahlen schreiben, das heißt, gilt $n = x^2 + y^2 = z^2 + w^2$ mit $\{x, y\} \neq \{z, w\}$, so ist n keine Primzahl.
Hinweis: Zeige:

a. O.B.d.A. kann man $x \equiv z \pmod{2}$ und $y \equiv w \pmod{2}$ voraussetzen.

b. Die Gleichungen
$$\frac{x+z}{2} = ac, \quad \frac{z-x}{2} = bd, \quad \frac{y+w}{2} = cb, \quad \frac{y-w}{2} = ad$$
haben ganzzahlige Lösungen a, b, c, d.

c. $n = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

Aufgabe 16: Es sei $2 \neq p \in \mathbb{P}$, $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ und $a \in \mathbb{Z}$ eine Primitivwurzel modulo p^k. Zeige:

a. Ist a ungerade, so ist a eine Primitivwurzel modulo $2 \cdot p^k$.

b. Ist a gerade, so ist $a + p^k$ eine Primitivwurzel modulo $2 \cdot p^k$.