

Elementare Zahlentheorie

Abgabetermin: Donnerstag, 24/06/2010, 12:00

Aufgabe 21:

- Welchen Wert hat das Legendre-Symbol $\left(\frac{822}{2207}\right)$?
- Ist 17 ein quadratischer Rest modulo 6439?
- Ist 649 eine 4-te Potenz in \mathbb{Z}_{859} ?
- Ist $X^2 + 11X + 573$ irreduzibel über \mathbb{Z}_{733} ?

Aufgabe 22: Ist die Fermatsche Zahl $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ eine Primzahl und $n > 0$, so gilt

$$3^{\frac{F_n-1}{2}} \equiv -1 \pmod{F_n}.$$

Aufgabe 23: Es sei $p \in \mathbb{P}$ eine ungerade Primzahl.

a. Zeige,

$$\nu_{2,p} = \left| \left\{ n \mid \frac{p-1}{4} < n \leq \frac{p-1}{2} \right\} \right|.$$

b. Zeige,

$$\left(\frac{2}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{falls } p \equiv \pm 1 \pmod{8}, \\ -1, & \text{falls } p \equiv \pm 3 \pmod{8}. \end{cases}$$

Aufgabe 24: Es sei $p \in \mathbb{P}$ eine ungerade Primzahl und $k, m \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(p, km) = 1$. Falls die diophantische Gleichung

$$x^2 - m \cdot y^2 = k \cdot p$$

eine Lösung hat, dann ist das Legendre-Symbol $\left(\frac{m}{p}\right) = 1$.