Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2010, Blatt 7

Michael Cuntz

Elementare Zahlentheorie

Abgabetermin: Donnerstag, 8/07/2010, 12:00

Aufgabe 25: Zeige:

a. $\mathbb{Z}[\omega_{-1}]^* = \{\pm 1, \pm i\}$.

b. $\mathbb{Z}[\omega_{-3}]^* = \{\pm 1, \pm\omega_{-3}, \pm\omega_{-3}^2\}$.

c. $\mathbb{Z}[\omega_m]^* = \{\pm 1\}$ falls $m \in \mathbb{Z}_{<0} \backslash \{-1, -3\}$ quadratfrei.

Aufgabe 26: Es sei $m \in \mathbb{Z}$ eine quadratfreie ganze Zahl und $x \in \mathbb{Z}[\omega_m]$.

a. Zeige: Ist $N(x)$ irreduzibel in $\mathbb{Z}$, so ist x irreduzibel in $\mathbb{Z}[\omega_m]$. Gilt auch die Umkehrung?

b. Zeige: Jedes Element in $\mathbb{Z}[\omega_m]$, das nicht Null und keine Einheit ist, läßt sich als Produkt von endlich vielen irreduziblen Elementen schreiben.

c. Welche der folgenden $x \in \mathbb{Z}[\omega_7]$ sind Einheiten bzw. irreduzibel?
(i) $x = 8 + 3\sqrt{7}$, (ii) $x = 3 + 2\sqrt{7}$.

Hinweis: in Teil b. führe man Induktion nach $|N(x)|$.

Aufgabe 27: Bestimme unendlich viele Lösungen von $x^2 - 5y^2 = -1$.

Aufgabe 28:

a. Für $m \in \mathbb{Z}$ quadratfrei bezeichne $B(m) := \{N(\alpha) \mid 0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}[\omega_m]\}$ die Menge der Normen von $\mathbb{Z}[\omega_m]$. Zeige oder widerlege:

   (a) $n \in B(-7) \;\Rightarrow\; 2n \in B(-7)$.

   (b) $n \in B(7) \;\Rightarrow\; 2n \in B(7)$.

b. Zeige: Sind $x, y \in \mathbb{Z}$ zwei teilerfremde ganze Zahlen und ist $1 \neq m \in \mathbb{Z}$ quadratfrei, so sind x und y auch teilerfremd in $\mathbb{Z}[\omega_m]$.