Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2014, Blatt 1

Elementare Zahlentheorie

Die Aufgaben sind als Wiederholung von Begriffen aus der Vorlesung Algebraische Strukturen gedacht, die für die Vorlesung Elementare Zahlentheorie von Bedeutung sind. Die Aufgaben brauchen nicht zur Korrektur eingereicht zu werden und werden nur auf Nachfrage in den Übungen besprochen.

Aufgabe 1:

a. Die ganzen Zahlen sind ein Hauptidealring, so daß die Begriffe ggT und kgV definiert sind.

   (a) Berechne einen Erzeuger für das Ideal $\langle 527, 1364\rangle$ in $\mathbb{Z}$.

   (b) Berechne $\text{ggT}(527, 1364)$.

   (c) Berechne $\text{kgV}(527, 1364)$.

b. Im Fundamentalsatz der elementaren Zahlentheorie haben wir die Vielfachheit $n_p(z)$ mit der eine Primzahl p eine ganze Zahl z teilt, eingeführt. Berechne $n_p(936)$ für alle Primzahlen $p \in \mathbb{P}$.

Aufgabe 2:

a. Berechne die Elemente in $\mathbb{Z}_{36}^*$.

b. Aus dem Chinesischen Restsatz wissen wir, daß $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. Gib den Isomorphismus an und rechne für jedes Element in $\mathbb{Z}_6$ das Bild aus. Verifiziere auf dem Weg, daß die Aussage stimmt.

c. Aus dem Chinesischen Restsatz wissen wir, daß die Gruppe $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{81}$ zyklisch ist. Gib einen Erzeuger für die Gruppe an.

d. Löse das folgende Kongruenzgleichungssystem in $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} x &\equiv 5 \pmod{81} \\ x &\equiv 7 \pmod{11} \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

a. Die Gruppe $U = \langle(1\ 2\ 3\ 4)\rangle \leq \mathbb{S}_4$ ist zyklisch der Ordnung 4 und mithin isomorph zu $\mathbb{Z}_4$. Gib einen Isomorphismus an.

b. Finde alle Untergruppen von U.

c. Finde alle Untergruppen der zyklischen Gruppen $(\mathbb{Z}_{28}, +)$ und $(\mathbb{Z}_{34}, +)$.

d. Es sei $\sigma = (1\ 2\ 5\ 4) \circ (3\ 6) \in \mathbb{S}_6$. Berechne die Ordnung von σ, σ^2 und σ^3, ohne σ^2 und σ^3 zu berechnen.

e. Berechne die Ordnung von $\overline{1}, \overline{7}, \overline{12} \in \mathbb{Z}_{36}$.

Aufgabe 4: Zeige, für $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$ gilt $\text{ggt}(a, b) = \text{ggt}(a + c \cdot b, b)$.