

Elementare Zahlentheorie

Abgabetermin: Mittwoch, 30/04/2014, 10:00

Fernstudenten reichen alle Aufgaben ein. Für alle anderen Studenten ist die Aufgabe 8 eine Präsenzaufgabe, deren Lösung nicht eingereicht werden muß.

Aufgabe 5: Ist $n \in \mathbb{Z}$ mit $n > 4$ keine Primzahl, so gilt $n \mid (n - 1)!$.

Aufgabe 6: Für eine positive ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}_{>0}$ bezeichnen wir mit

$$\tau(z) = |\{d \in \mathbb{Z}_{>0} \mid d \mid z\}|$$

die Anzahl der positiven Teiler von z , und mit

$$P(z) = \prod_{\substack{1 \leq d \leq z \\ d \mid z}} d$$

das Produkt aller positiven Teiler. Zeige

$$\tau(z) = \prod_{p \in \mathbb{P}} (n_p(z) + 1)$$

und

$$P(z) = z^{\frac{\tau(z)}{2}}.$$

Aufgabe 7: Es seien $c_0, c_1, c_2, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(c_1, c_2) \mid c_0$ und $\text{ggT}(c_1, c_2) = a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2$. Zeige, genau dann ist $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$ eine Lösung der diophantischen Gleichung

$$c_0 = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2,$$

wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so daß

$$z_1 = \frac{c_0 \cdot a_1}{\text{ggT}(c_1, c_2)} + \frac{c_2 \cdot k}{\text{ggT}(c_1, c_2)} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{c_0 \cdot a_2}{\text{ggT}(c_1, c_2)} - \frac{c_1 \cdot k}{\text{ggT}(c_1, c_2)}.$$

Aufgabe 8:

a. Überprüfe, ob die diophantische Gleichung

$$102 = 90 \cdot x_1 + 120 \cdot x_2 + 108 \cdot x_3$$

lösbar ist und gib gegebenenfalls eine Lösung an.

b. Ein Straßenverkäufer verkauft Luftballons, kleine zu 98 Cent das Stück und große zu 1,58 Euro. Am Abend hat er 170,28 Euro in der Tasche und von den je 100 kleinen und großen Ballons, die er dabei hatte, ist ein großer Teil verkauft. Wieviele Ballons von welcher Größe hat er verkauft?