Was forscht ein Mathematiker?

Thomas Markwig

Georg-August-Universität Göttingen

25. Juni 2009

Algebraische Geometrie

Algebra **Geometrie**

Algebraische Geometrie

Algebra **Geometrie**

$$x - y = 0$$

oder

$$y - x^2 = 0$$

oder

$$y^2 - x^2 = 0$$

Algebraische Geometrie

Algebra

$$x - y = 0$$

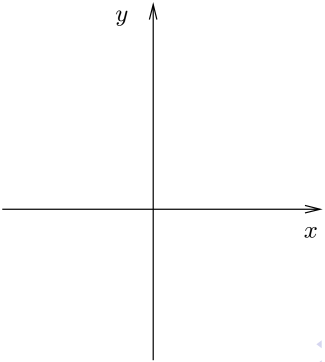
oder

$$y - x^2 = 0$$

oder

$$y^2 - x^2 = 0$$

Geometrie



René Descartes, 1637

Algebraische Geometrie

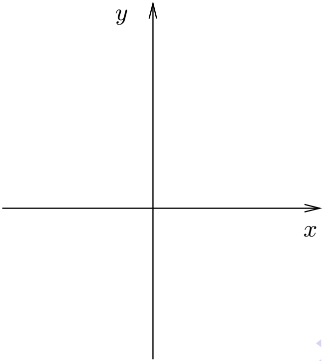
Algebra

$x - y = 0$

d.h.

$x = y$

Geometrie



René Descartes, 1637

Algebraische Geometrie

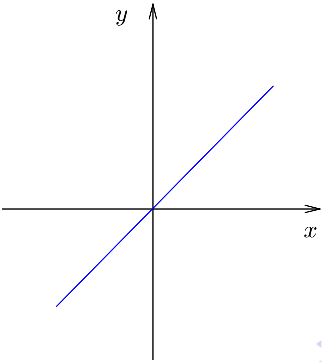
Algebra

$$x - y = 0$$

d.h.

$$x = y$$

Geometrie



René Descartes, 1637

Algebraische Geometrie

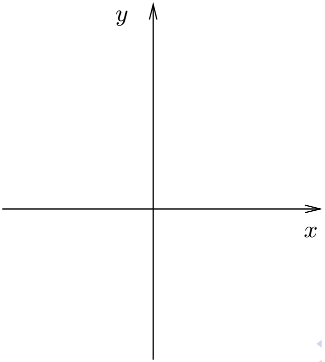
Algebra

$$y - x^2 = 0$$

d.h.

$$y = x^2$$

Geometrie



René Descartes, 1637

Algebraische Geometrie

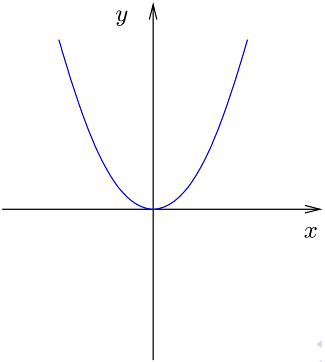
Algebra

$$y - x^2 = 0$$

d.h.

$$y = x^2$$

Geometrie



René Descartes, 1637

Algebraische Geometrie

Algebra

$$y^2 - x^2 = 0$$

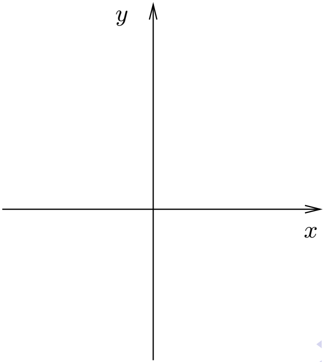
d.h.

$$(y - x) \cdot (y + x) = 0$$

d.h.

$$y = x \quad \text{oder} \quad y = -x$$

Geometrie



René Descartes, 1637

Algebraische Geometrie

Algebra

$$y^2 - x^2 = 0$$

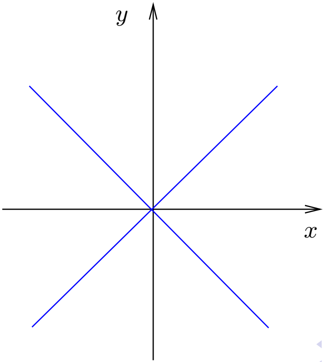
d.h.

$$(y - x) \cdot (y + x) = 0$$

d.h.

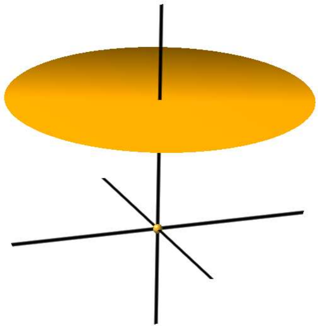
$$y = x \quad \text{oder} \quad y = -x$$

Geometrie



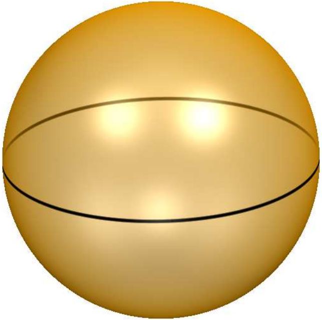
René Descartes, 1637

Eine Ebene im Raum



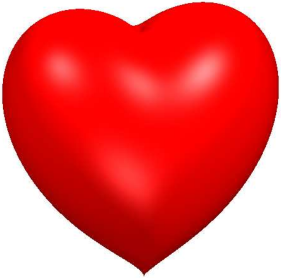
$$z = 1$$

Eine Kugel



$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Das Herz der Mathematiker

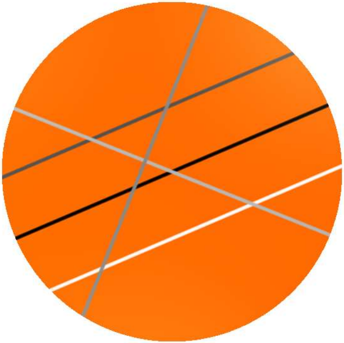


$$(2 \cdot x^2 + y^2 + z^2 - 1)^3 - \frac{1}{10} \cdot x^2 \cdot z^3 - y^2 \cdot z^3 = 0$$

Kermit

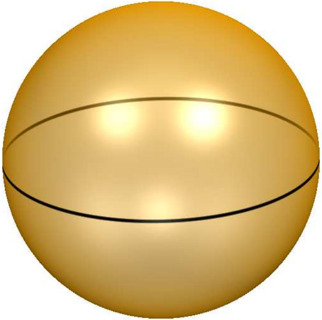
$$\left(x^2 + \frac{9}{4} \cdot y^2 + z^2 - 1\right)^3 - x^2 \cdot z^3 - \frac{9}{80} \cdot y^2 \cdot z^3 + \frac{3}{25} \cdot z = 0$$

Geraden in der Ebene



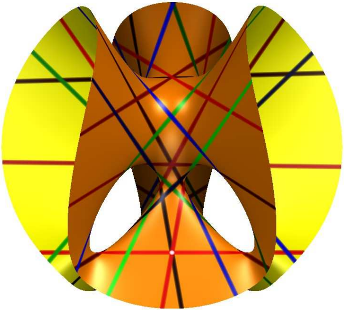
In einer Ebene gibt es unendlich viele Geraden.

Geraden auf der Kugel



Auf der Kugeloberfläche gibt es gar keine Geraden.

Geraden auf einer Kubik



Auf der Kubik von Clebsch

$$x^3 + y^3 + z^3 + 1 - (x + y + z + 1)^3 = 0$$

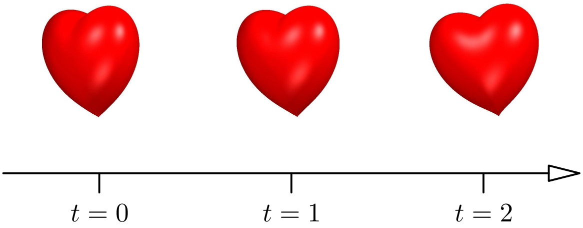
gibt es genau 27 Geraden.

Robotersteuerung

Gleichungen bei der Robotersteuerung

$$
\begin{aligned}
&2u^4+4u^2v^2+2v^4+4u^2w^2+4v^2w^2+2w^4+4u^2z^2+4v^2z^2\\
&+4w^2z^2+2z^4-2u^2wy-2v^2wy-2w^3y-2u^2zy\\
&-2v^2zy-2w^2zy-2wz^2y-2z^3y+u^2y^2+v^2y^2\\
&+w^2y^2+z^2y^2+2u^2ws+2v^2ws+2w^3s-2u^2zs\\
&-2v^2zs-2w^2zs+2wz^2s-2z^3s+u^2s^2+v^2s^2\\
&+w^2s^2+z^2s^2+2u^3t-2u^2vt+2uv^2t-2v^3t\\
&+2uw^2t-2vw^2t+2uz^2t-2vz^2t+u^2t^2+v^2t^2\\
&+w^2t^2+z^2t^2+2u^3r+2u^2vr+2uv^2r+2v^3r\\
&+2uw^2r+2vw^2r+2uz^2r+2vz^2r+u^2r^2+v^2r^2\\
&+w^2r^2+z^2r^2+4uw+4vw-4uz+4vz\\
&-2vy+2us-2zt+2wr-7/2=0
\end{aligned}
$$

Raum-Zeit



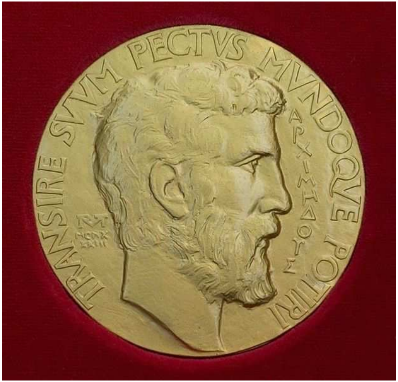
Raum-Zeit wird parametrisiert durch $\mathbb{R}^4$ mit den Koordinaten

$$(x, y, z, t)$$

Stringtheorie

- Versuch der Physiker, die allgemeine Relativitätstheorie und die Quantenmechanik in einem Modell zu erklären
- Elementarteilchen werden durch Strings ersetzt, die eindimensional sind, d.h. die Kurven sind
- das Modell braucht sechs Raum-Zeit-Dimensionen
- es ist selbst Lösungsmenge eines Gleichungssystems in noch mehr Unbestimmten
- sich bewegende Strings haben komplexe Kurven als Bahn, die die Physiker zählen wollen (Gromov-Witten-Invarianten)

Gromov-Witten-Invarianten



Fields Medaille für Maxim Kontsevich, 1998

Tropische Rechenregeln

$$x \oplus y := \max\{x, y\}$$

Tropische Rechenregeln

$x \oplus y := \max\{x, y\}$

$x \odot y := x + y$

Tropische Rechenregeln

$$x \oplus y := \max\{x, y\}$$

$$x \odot y := x + y$$

- $2 \oplus 3 =$

Tropische Rechenregeln

$$x \oplus y := \max\{x, y\}$$

$$x \odot y := x + y$$

- $2 \oplus 3 = 3.$

Tropische Rechenregeln

$$x \oplus y := \max\{x, y\}$$

$$x \odot y := x + y$$

- $2 \oplus 3 = 3.$
- $5 \odot 7 =$

Tropische Rechenregeln

$$x \oplus y := \max\{x, y\}$$

$$x \odot y := x + y$$

- $2 \oplus 3 = 3.$
- $5 \odot 7 = 12.$

Tropische Rechenregeln

$$x \oplus y := \max\{x, y\}$$
$$x \odot y := x + y$$

- $2 \oplus 3 = 3.$
- $5 \odot 7 = 12.$

Die binomische Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

oder

$$(a+b) \cdot (a+b) = a \cdot a + 2 \cdot a \cdot b + b \cdot b$$

wird tropisch zu

Tropische Rechenregeln

$$x \oplus y := \max\{x, y\}$$

$$x \odot y := x + y$$

- $2 \oplus 3 = 3.$
- $5 \odot 7 = 12.$

Die binomische Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

oder

$$(a+b) \cdot (a+b) = a \cdot a + 2 \cdot a \cdot b + b \cdot b$$

wird tropisch zu

$$(a \oplus b) \odot (a \oplus b) = 2 \cdot \max\{a, b\} = \max\{2a, 2b\} = a \odot a \oplus b \odot b.$$

Tropische Polynome

$$x \oplus y \oplus 1 = \max\{x, y, 1\}$$

Tropische Polynome

$$x \oplus y \oplus 1 = \max\{x, y, 1\}$$

Idee

tropische Kurve = alle Punkte (x, y) der Ebene, für die das Maximum mindestens zweimal angenommen wird.

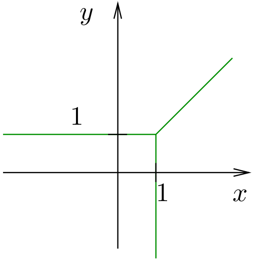
Tropische Polynome

$$x \oplus y \oplus 1 = \max\{x, y, 1\}$$

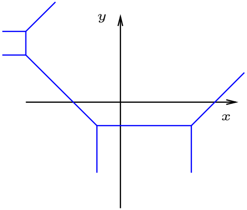
Idee

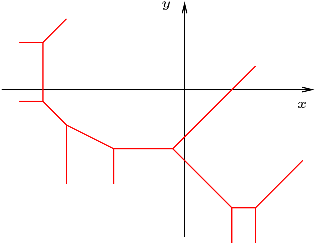
tropische Kurve = alle Punkte (x, y) der Ebene, für die das Maximum mindestens zweimal angenommen wird.

$$\begin{aligned} x &= y \geq 1 \\ x &= 1 \geq y \\ y &= 1 \geq x \end{aligned}$$



Tropische Kurven





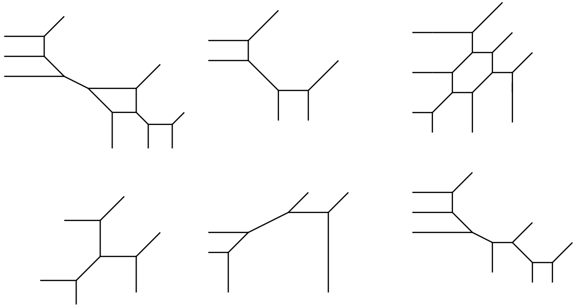
$$3 \oplus 4 \odot x \oplus 1 \odot x \odot x \oplus 1 \odot y \oplus 5 \odot x \odot y \oplus -2 \odot y \odot y$$

$$= \max\{3, 4 + x, 1 + 2x, 1 + y, 5 + x + y, -2 + 2y\}$$

$$1 \oplus 5/2 \odot y \oplus 3 \odot y \odot y \oplus 1 \odot y \odot y \odot y \oplus 4 \odot x \oplus -2 \odot x \odot y \oplus 9 \odot y \odot y \odot x \oplus 2 \odot x \odot x \oplus 7 \odot y \odot x \odot x \oplus -1 \odot x \odot x \odot x$$

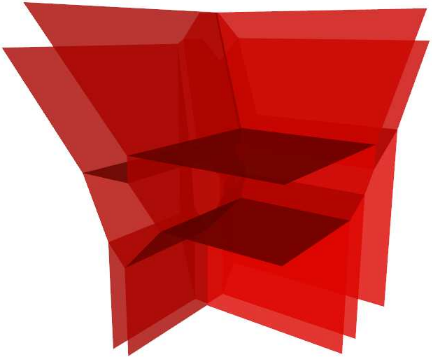
$$= \max\{1, 5/2 + y, 3 + 2y, 1 + 3y, 4 + x, -2 + x + y, 9 + 2y + x, 2 + 2x, 7 + y + 2x, -1 + 3x\}$$

Tropische Kurven



Tropische Flächen

Tropische Flächen



Gromov-Witten-Invarianten tropisch

- statt algebraische Kurven zu zählen, kann man tropische Kurven zählen
- die Zahlen sind gleich
- aber tropisch zu zählen ist einfacher

Das ist eines der vielen Wunder der Mathematik!

Botschaft

- Den Mathematikern gehen nie die Fragen aus!
- Ein Mathematiker muß ...
    - gut strukturiert denken können,
    - logische Schlüsse ziehen können,
    - kreativ sein und
    - offen, neue Wege zu gehen ...
- ... er muß nicht unbedingt gut rechnen können.

Surfer

http://www.imaginary2008.de/surfer.php

oder

Google: Imaginary Surfer