Euro-Münzen zum 732. Jahrestag?

Thomas Markwig

Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe Algebra, Geometrie
und Computeralgebra
TU Kaiserslautern

November 21, 2008

1 Problemstellung

Der Ort Kaiserslautern hat eine lange Geschichte und einer der Höhepunkte war die Verleihung der Stadtrechte durch König Rudolf von Habsburg am 18. August 1276. Damit waren die Bürger Kaiserslauterns keinem anderen Herrn mehr dienstpflichtig als dem König. Rechte wie das, eigene Münzen zu prägen oder Markt abzuhalten, eine eigene Gerichtsbarkeit zu führen und Steuern zu erheben, bedeuteten Aufstieg und Wohlstand für die Bürger der Stadt. Ist die Erinnerung daran nicht ein guter Anlaß, noch einmal mit dem Prägen eigener Münzen anzufangen?
732 Jahre ist die Verleihung der Stadtrechte her, deshalb soll eine Münzsammlung im Wert von 732 Euro geprägt werden, mit der ungewöhnlichen Stückelung in 1-Euro, 5-Euro, 25-Euro und 100-Euro Münzen. Die Sammlung wird in Auftrag gegeben und mangels genauerer Angaben bleibt es dem Designer überlassen, zu entscheiden, wieviele Münzen welcher Sorte in die Sammlung sollen. Er ist mit einer Lösung rasch zur Hand: da er zwei Kinder im Alter von 12 und 14 Jahren hat, entscheidet er sich für zwölf 1-Euro Münzen, vierzehn 5-Euro Münzen und zwei 25-Euro Münzen. Damit die Sammlung aufgeht, muß er sechs 100-Euro Münzen dazu nehmen. Alle Münzen haben die gleiche Größe und der Designer fertigt gleich eine ansprechende Schatulle mit an, in die sich die 34 Münzen paßgenau einfügen. Das Design gefällt auf Anhieb, doch bei genauer Betrachtung zeigt sich, daß die 5-Euro und 100-Euro Münzen in der Herstellung deutlich teurer sind als die übrigen. Aus Gründen der Sparsamkeit, soll die Anzahl der teureren Münzen minimiert werden. Ein löbliches Ansinnen, aber wie kann man es umsetzen? Die Schatulle soll nicht geändert werden, also müssen es 34 Münzen bleiben. Wie findet man die optimale Lösung?

2 Mathematische Formulierung

Ganz offensichtlich handelt es sich bei der Frage um ein mathematisches Problem und wir wollen es zunächst in eine algebraische Fassung bringen. Wir bezeichnen die Anzahl der 1-Euro Münzen in der Sammlung mit E, die der 5-Euro Münzen mit F, die der 25-Euro Münzen mit Z und die der 100-Euro Münzen mit H. In der Sammlung, die der Designer vorlegt, gilt dann

$$E = 12,\ F = 14,\ Z = 2 \quad \text{und} \quad H = 6.$$

Da es sich um 34 Münzen handelt, gilt

$$E + F + Z + H = 34, \tag{1}$$

und da die Sammlung einen Wert von 732 Münzen hat, gilt zudem

$$1 \cdot E + 5 \cdot F + 25 \cdot Z + 100 \cdot H = 732. \tag{2}$$

Wir wollen nun eine neue Sammlung zusammenstellen, ohne den Wert der Sammlung oder die Anzahl der Münzen zu verändern, d.h. wir suchen andere Werte für E, F, Z und H, so daß die beiden Gleichungen (1) und (2) immer noch erfüllt sind.
Dabei unterliegen die Zahlen E, F, Z und H noch weiteren Einschränkungen. Zunächst müssen sie *ganze* Zahlen sein, keine echten Brüche, schließlich gibt es keine halben Münzen. Der Mathematiker schreibt dafür

$$E, F, Z, H \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

wobei $\mathbb{Z}$ die Menge aller ganzen Zahlen ist. Ganze Zahlen dürfen aber auch negativ sein, während es ganz sicher keine negative *Anzahl* von Münzen geben kann. Wir erhalten schließlich also noch die Bedingungen

$$E \geq 0, \quad F \geq 0, \quad Z \geq 0 \quad \text{und} \quad H \geq 0. \tag{4}$$

Zahlen E, F, Z und H, die den Bedingungen (1)–(4) genügen, sind mögliche Kandidaten für die Anzahl an Münzen in unserer Sammlung. Und unter all diesen suchen wir solche, für die die Anzahl an Fünfern und Hundertern minimal wird, d.h. wir wollen die Summe

$$F + H$$

minimieren.
Wir fassen das Problem in folgender Formulierung zusammen:

$$\begin{aligned} &\min\{F + H\} \\ &1 \cdot E + 5 \cdot F + 25 \cdot Z + 100 \cdot H = 732 \\ &E + F + Z + H = 34 \\ &E \geq 0, \quad F \geq 0, \quad Z \geq 0, \quad H \geq 0 \\ &E, F, Z, H \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{5}$$

Man nennt dies ein *lineares ganzzahliges Optimierungsproblem* und liest es wie folgt: man *minimiere* die Funktion $F+H$ unter den *linearen Nebenbedingungen*, die in den Zeilen 2–4 gegeben sind, wobei die Veränderlichen E, F, Z und H nur *ganzzahlige Werte* annehmen dürfen.

3 Der naive Ansatz

Bei einem kleinen Beispiel wie dem unseren ist der naive Ansatz sicher der, der am schnellsten zum Ziel führt. Wir stellen zunächst fest, daß es nicht mehr als 732 Einer in der Sammlung geben kann, d.h.

$$0 \leq E \leq 732,$$

und nicht mehr als 146 Fünfer, d.h.

$$0 \leq F \leq 146,$$

und nicht mehr als 29 Fünfundzwanziger, d.h.

$$0 \leq Z \leq 29,$$

und nicht mehr als 7 Hunderter, d.h.

$$0 \leq H \leq 7.$$

Es gibt also nur endlich viele Möglichkeiten für ein Quadrupel (E, F, Z, H). Wir können einfach die

$$733 \cdot 147 \cdot 30 \cdot 8 = 25.860.240$$

Möglichkeiten für (E, F, Z, H) durchprobieren, uns die merken, die die Nebenbedingungen (1)–(4) erfüllen, und unter diesen dann diejenigen aussuchen, für die die Summe $F + H$ minimal wird.

26 Millionen Zahlenpaare zu testen ist sicher nichts, was man an einem Nachmittag per Hand tun möchte, aber man braucht nur wenige Minuten, um ein Computerprogramm zu schreiben, daß die Rechnungen für uns übernimmt. In dem Computeralgebrasystem Singular, das wir für ausgefeiltere Methoden noch brauchen, sieht der Code, der das Problem löst etwa folgendermaßen aus:

```
int i,j,k,l,m;
list L;
m=0;
for (i=0;i<=34;i++)
{
  for (j=0;(j<=34) and (j<=146);j++)
  {
```

```
    for (k=0;(k<=34) and (k<=29);k++)
    {
      for (l=0;l<=7;l++)
      {
        if ((i+j+l+k==34) and (i+5*j+25*k+100*l==732))
        {
          m++;
          L[m]=intvec(i,j,k,l);
        }
      }
    }
  }
}
j=1;
k=L[1][2]+L[1][4];
for (i=1;i<=size(L);i++)
{
  if (L[i][2]+L[i][4]<k)
  {
    j=i;
    k=L[i][2]+L[i][4];
  }
}
L[j];
```

In weniger als fünf Sekunden haben wir das Ergebnis und es lautet

$$E = 7, \quad F = 5, \quad Z = 20 \quad \text{und} \quad H = 2.$$

Die minimal mögliche Anzahl der teuren Münzen ist also

$$F + H = 5 + 2 = 7,$$

und sie ist deutlich kleiner als in der vom Designer vorgeschlagenen Sammlung, in der es $14 + 6 = 20$ teure Münzen gab.
Der Vorteil der hier vorgestellten Methode ist, daß man in der Tat alle *zulässigen* Lösungen findet, d.h. man findet alle Quadrupel (E, F, Z, H), die den Bedingungen (1)–(4) genügen. Es sind sieben an der Zahl, nämlich:

```
[1]: (2,11,19,2)
[2]: (2,26,0,6)
[3]: (7,5,20,2)
[4]: (7,20,1,6)
```

```
[5]: (12,14,2,6)
[6]: (17,8,3,6)
[7]: (22,2,4,6)
```

Auf dem Weg kann man z.B. überprüfen, ob es eventuell mehr als eine Möglichkeit gibt, den minimalen Wert $F+H=7$ zu erreichen. In unserem Beispiel ist das nicht der Fall. Man zahlt für diese volle Information aber einen *teuren* Preis — per Hand kann man die Rechnungen gar nicht mehr durchführen, und wenn das Problem ein wenig komplexer wird, dann wird auch der Computer mit den Rechnungen nicht mehr zu Ende kommen.

4 Ein wenig Überlegung hilft weiter!

Die hier dargestellten Ausführungen stellen im wesentlichen den Lösungsvorschlag eines Wettbewerbsteilnehmers, Martin Lamm, dar, der heute als Softwareentwickler arbeitet und vor einigen Jahren in seiner Diplomarbeit einen wesentlichen Beitrag zur Entwicklung von SINGULAR geleistet hat.
Zahlen E, F, Z und H, die den Bedingungen (1) und (2) genügen, müssen auch der Differenz der Bedingungen genügen:

$$(E+5\cdot F+25\cdot Z+100\cdot H)-(E+F+Z+H)=732-34.$$

Wir erhalten also die neue Gleichung

$$4\cdot F+24\cdot Z+99\cdot H=698. \tag{6}$$

Wir wissen schon, daß die Zahl H zwischen 0 und 6 liegen muß. Stellen wir die neue Gleichung nach H um,

$$99\cdot H=698-24\cdot Z-4\cdot F,$$

so sind die Zahlen auf der rechten Seite der Gleichung alle gerade. Damit $99\cdot H$ ebenfalls gerade ist, darf H keine ungerade Zahl sein. Wir erhalten also die weitere Einschränkung

$$H\in\{0,2,4,6\}.$$

Wäre $H=0$ oder $H=4$, dann wäre $99\cdot H$ durch vier teilbar und damit wäre die rechte Seite der Gleichung (6) durch vier teilbar. 698 ist aber nicht durch vier teilbar, so daß dies unmöglich ist. Wir sehen also

$$H\in\{2,6\}.$$

Insbesondere stellen wir fest, daß wir mindestens zwei 100-Euro Münzen in unserer Sammlung haben müssen!

Schon diese wenigen Überlegungen erlauben es uns, die Zahl der Fälle, die man durchprobieren müßte, drastisch zu senken, denn $H = 2$ bzw. $H = 6$ senkt die maximalen Werte für E, F und Z ebenfalls erheblich. Es blieben ganze

$$532 \cdot 106 \cdot 21 + 132 \cdot 26 \cdot 5 = 1.201.392$$

Fälle übrig. Auch das ist noch viel. Es lohnt also, sich etwas mehr anzustrengen.
Dazu schauen wir uns die Gleichung (6) etwas genauer an, formen sie zu

$$4 \cdot F + 24 \cdot Z = 698 - 99 \cdot H \tag{7}$$

um und betrachten die beiden Fälle $H = 2$ und $H = 6$ gesondert.
Ist $H = 2$, so hat (7) die Form

$$4 \cdot F + 24 \cdot Z = 500.$$

Da beide Seiten der Gleichung durch vier teilbar sind, können wir beide Seiten durch vier teilen und erhalten die Gleichung

$$F + 6 \cdot Z = 125. \tag{8}$$

Diese können wir wiederum schreiben als

$$F + 1 = 126 - 6 \cdot Z,$$

wobei die rechte Seite der Gleichung durch 6 teilbar ist. Damit muß auch $F + 1$ durch 6 teilbar sein und wir erhalten wegen $F \leq \frac{732 - H \cdot 100}{5} = 106\frac{2}{5}$

$$F \in \{5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, 65, 71, 77, 83, 89, 95, 101\}.$$

Die Zahl der zu prüfenden Fälle reduziert sich also noch einmal drastisch. Zudem können wir beim Suchen einer Lösung mit $F = 5$ beginnen, da wir $F + H$ ja minimieren wollen. Gilt $H = 2$ und $F = 5$, so folgt aus (8) unmittelbar

$$6 \cdot Z = 120,$$

d.h. $Z = 20$. Aber dann können wir dies in (1) einsetzen und erhalten

$$34 = E + F + Z + H = E + 5 + 20 + 2 = E + 27,$$

d.h. $E = 7$. Wir haben im Fall $H = 2$ also die Lösung

$$(E, F, Z, H) = (7, 5, 20, 2)$$

gefunden, die die Summe $F + H$ mit dem Wert 7 minimiert.
Wir wollen nun noch den Fall $H = 6$ untersuchen. Die Gleichung (7) nimmt dann die Form

$$4 \cdot F + 24 \cdot Z = 104$$

an oder nach Teilen durch vier die Form

$$F + 6 \cdot Z = 26.$$

Wie oben können wir diese Gleichung zu

$$F + 4 = 30 - 6 \cdot Z$$

umformen und sehen, daß $F + 4$ durch 6 teilbar sein muß. Damit muß F aber mindestens 2 sein, was

$$F + H \geq 2 + 6 = 8$$

zur Folge hat. Die Sammlung würde auf alle Fälle teurer werden als die zuvor gefundene.
In der Tat hätte man die Betrachtung auch mit dem Fall $H = 2$ beenden können, denn man möchte in der Münzsammlung ja sicher jede Münze mindestens einmal vertreten haben, d.h. eigentlich sollte man $E \geq 1$, $F \geq 1$, $Z \geq 1$ und $H \geq 1$ fordern. Dann kann man im Fall $H = 6$ aber den Wert $F + H = 7$ nicht mehr unterschreiten und könnte sich also zufrieden geben.
Wir haben unsere optimale Lösung

$$E = 7, \quad F = 5, \quad Z = 20 \quad \text{und} \quad H = 2$$

hier ganz ohne den Einsatz eines Computers gefunden, indem wir die Gleichungen ineinander eingesetzt und damit die Zahl der Variablen verkleinert haben und indem wir anschließend Teilbarkeitseigenschaften ausgenutzt haben.
Dieser Ansatz ist sehr elegant, hat aber den Nachteil, daß er nicht leicht auf andere Beispiele ähnlicher Art zu verallgemeinern ist. Denn die Frage, welche Teilbarkeitseigenschaften (in unserem Beispiel *teilbar durch* 2, *durch* 4 *und durch* 6) man betrachten sollte, hängt sehr vom Beispiel ab und ist bei großen Zahlen und vielen Variablen wenig aussichtsreich. Wir brauchen eine bessere, systematischere Methode, die einen allgemeinen Algorithmus zuläßt.

5 Verbesserung der Lösung durch Testmengen

Wir wollen nach wie vor das lineare ganzzahlige Optimierungsproblem (5) lösen:

$$\begin{aligned}
&\min\{F + H\} \\
&1 \cdot E + 5 \cdot F + 25 \cdot Z + 100 \cdot H = 732 \\
&E + F + Z + H = 34 \\
&E \geq 0, \quad F \geq 0, \quad Z \geq 0, \quad H \geq 0 \\
&E, F, Z, H \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Dabei wollen wir im folgenden ein Quadrupel (E, F, Z, H) von ganzen Zahlen *zulässig* nennen, wenn es die linearen Bedingungen

$$\begin{aligned} &1 \cdot E + 5 \cdot F + 25 \cdot Z + 100 \cdot H = 732 \\ &E + F + Z + H = 34 \\ &E \geq 0, \quad F \geq 0, \quad Z \geq 0, \quad H \geq 0 \end{aligned}$$

des Problems erfüllt.
Nehmen wir an, wir haben ein zulässiges Quadrupel (E, F, Z, H), z.B. die Sammlung des Designers $(12, 14, 2, 6)$. Was geschieht, wenn wir von unserem Quadrupel das Quadrupel $(-5, 6, -1, 0)$ subtrahieren, d.h. wir bilden

$$(E, F, Z, H) - (-5, 6, -1, 0) = (E + 5, F - 6, Z + 1, H)?$$

Ich behaupte, solange $F - 6 \geq 0$ nicht negativ ist, erhalten wir wieder ein zulässiges Quadrupel! Dies ist leicht einzusehen:

$$\begin{aligned} &1 \cdot (E + 5) + 5 \cdot (F - 6) + 25 \cdot (Z + 1) + 100 \cdot H = \\ &\qquad (1 \cdot E + 5 \cdot F + 25 \cdot Z + 100 \cdot H) + (5 - 6 \cdot 5 + 25) = 732 + 0 = 732 \end{aligned}$$

und

$$(E + 5) + (F - 6) + (Z + 1) + H = (E + F + Z + H) + (5 - 6 + 1) = 34 + 0 = 34;$$

zudem sind die Fünfer die einzige Münzsorte, die durch die Operation abnimmt, so daß deren Anzahl $F - 6$ eventuell negativ werden könnte.
Was ist das besondere an den Bedingungen und an dem Quadrupel $(-5, 6, -1, 0)$, daß das funktioniert?
Zunächst ist $(e, f, z, h) = (-5, 6, -1, 0)$ eine Lösung der linearen Gleichungen

$$e + 5 \cdot f + 25 \cdot z + 100 \cdot h = 0 \tag{9}$$

und

$$e + f + z + h = 0 \tag{10}$$

die aus den linearen Gleichungen unseres Problems entstehen, indem wir die rechte Seite, Inhomogenität genannt, durch Null ersetzen. Man spricht davon, das zugehörige homogene Gleichungssystem zu betrachten.
Zudem sind die Bedingungen *linear* und es gilt stets, wenn (E, F, Z, H) ein lineares Gleichungssystem löst und (e, f, z, h) das zugehörige homogene Gleichungssystem löst, dann löst $(E, F, Z, H) - (e, f, z, h)$ ebenfalls das ursprüngliche Gleichungssystem. Testen wir dies in unserem Beispiel:

$$\begin{aligned} &1 \cdot (E - e) + 5 \cdot (F - f) + 25 \cdot (Z - z) + 100 \cdot (H - h) = \\ &(1 \cdot E + 5 \cdot F + 25 \cdot Z + 100 \cdot H) - (e + 5 \cdot f + 25 \cdot z + 100 \cdot h) = 732 + 0 = 732 \end{aligned}$$

und

$$(E-e)+(F-f)+(Z-z)+(H-h) = (E+F+Z+H)-(e+f+z+h) = 34+0 = 34.$$

Weshalb ist diese Erkenntnis interessant?
Unser Ziel ist es, eine zulässige Lösung zu finden, bei der die Anzahl an Fünfern und Hundertern minimal ist. Subtrahieren wir von einer zulässigen Lösung das Quadrupel $(-5, 6, -1, 0)$, so verringern wir die Anzahl an Fünfern und verringern damit den Wert der sogenannten *Kostenfunktion* $F + H$. Unsere Lösung wird also besser!
Starten wir z.B. mit der zulässigen Lösung $(E, F, Z, H) = (12, 14, 2, 6)$ des Designers, für die die Kostenfunktion den Wert

$$F + H = 14 + 6 = 20$$

hat, so können wir das Quadrupel $(-5, 6, -1, 0)$ zweimal von (E, F, Z, H) subtrahieren und erhalten die zulässige Lösung

$$(12, 14, 2, 6) - 2 \cdot (-5, 6, -1, 0) = (22, 2, 4, 6),$$

für die der Wert der Kostenfunktion

$$2 + 6 = 8$$

ist. Der Wert hat sich deutlich verbessert, aber er ist noch nicht optimal, wie wir wissen.
Mit dem Quadrupel $(-5, 6, -1, 0)$ können wir uns nicht weiter verbessern, da die Anzahl der Fünfer negativ wird, wenn wir ihn noch einmal subtrahieren. Gibt es vielleicht noch andere Quadrupel dieser Art? Quadrupel, die das homogene Gleichungssystem unseres Problems lösen und zugleich den Wert der Kostenfunktion verbessern, wenn wir sie subtrahieren? Die Antwort auf diese Frage ist ja! Wie wäre es mit

$$(e, f, z, h) = (15, -3, -16, 4)$$

oder mit

$$(e, f, z, h) = (10, 3, -17, 4).$$

Einfaches Einsetzen der Werte in (9) und (10) zeigt, daß die beiden Gleichungen erfüllt sind. Zudem gilt in beiden Fällen, daß

$$f + h > 0$$

positiv ist. Zieht man (e, f, z, h) von einer zulässigen Lösung (E, F, Z, H) ab, so muß sich der Wert der Kostenfunktion verringern, da diese ebenfalls linear ist:

$$(F - f) + (H - h) = (F + H) - (f + h) \ < \ F + H.$$

Können wir mit einem dieser Quadrupel unsere zulässige Lösung $(E,F,Z,H) = (22,2,4,6)$ noch einmal verbessern? Nun, $(e,f,z,h) = (10,3,-17,4)$ können wir dazu zunächst nicht verwenden, denn wenn wir dieses abziehen würden, würden wir eine negative Anzahl $F - f = 2 - 3 = -1$ an Fünfern erhalten. Das andere Quadrupel können wir jedoch abziehen und erhalten:

$$(22,2,4,6) - (15,-3,-16,4) = (7,5,20,2)$$

als neue zulässige Lösung. Diese können wir nun weder mit $(-5,6,-1,0)$, noch mit $(10,3,-17,4)$ oder mit $(15,-3,-16,4)$ verbessern.
Sagt uns dies etwas darüber aus, ob die zulässige Lösung $(E,F,Z,H) = (7,5,20,2)$ minimal ist? Ja!
Die drei Quadrupel $(-5,6,-1,0)$, $(10,3,-17,4)$ und $(15,-3,-16,4)$ bilden eine sogenannte *Testmenge* für unser lineares ganzzahliges Optimierungsproblem. Das heißt nichts anderes, als daß jede zulässige Lösung, die noch nicht optimal ist, durch Subtraktion eines dieser Vektoren verbessert werden kann! Wenn dies nicht mehr möglich ist, haben wir also eine optimale Lösung, d.h. eine Lösung mit minimalem Wert der Kostenfunktion gefunden!
Natürlich wollen wir nun wissen, weshalb die angegebenen Quadrupel eine Testmenge bilden und wie wir sie gefunden haben!

6 Gröbnerbasen sind Testmengen

Es gibt verschiedene Algorithmen, um Testmengen zu einem gegebenen linearen ganzzahligen Optimierungsproblem zu berechnen. Eine Möglichkeit dazu sind Gröbnerbasen von torischen Idealen. Was nun folgt, wird etwas abstrakter als die bisherigen Betrachtungen.
Wir betrachten E, F, Z und H als Veränderliche und ersetzen ein Quadrupel wie $(10,3,-17,4)$ durch den Ausdruck

$$E^{10} \cdot F^3 \cdot H^4 - Z^{17}, \tag{11}$$

ein sogenanntes Binom im Polynomring $\mathbb{Q}[E,F,Z,H]$. Schreiben wir zudem unser homogenes lineares Gleichungssystem in Matrixform,

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 25 & 100 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E \\ F \\ Z \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

so erhalten wir die Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 25 & 100 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Menge der ganzzahligen Lösungen des Gleichungssystems kann berechnet werden und wird der Kern von A,

$$\mathrm{Kern}(A) \subseteq \mathbb{Z}^4,$$

genannt. Wie in (11) ordnen wir jedem u im Kern ein Binom in $\mathbb{Q}[E, F, Z, H]$ zu und bezeichnen die Menge der Linearkombinationen von diesen Binomen als das von A erzeugte *torische Ideal* I_A. Dieses kann mit Hilfe der sogenannten *Saturierung* aus einer Gitterbasis des Kerns von A bestimmt werden.
Wie kommt nun die Kostenfunktion ins Spiel? Wir haben oben bereits Ausdrücke der Form $E^a \cdot F^b \cdot Z^c \cdot H^d$ für natürliche Zahlen a, b, c, d betrachtet, z.B. $E^2 \cdot F^4 \cdot Z^2 \cdot H^3$ oder $E^3 \cdot F^5 \cdot Z \cdot H^5$. Wir würden diese Ausdrücke gerne anordnen, d.h. wir wollen festlegen, welcher der beiden Ausdrücke größer sein soll! Dabei hilft uns die Kostenfunktion. Wir setzen einfach die Exponenten der Veränderlichen in die Kostenfunktion ein und schauen, ob einer der Ausdrücke einen größeren Wert ergibt. In unserem Beispiel mit der Kostenfunktion $F + H$ erhalten wir für den ersten Ausdruck $4 + 3 = 7$ und für den zweiten Ausdruck $5 + 5 = 10$. Der zweite Ausdruck ist also größer. Mit ein wenig mehr Aufwand erhalten wir so eine sogenannte *Monomordung*, und bezüglich dieser Monomordnung berechnen wir eine *Gröbnerbasis* des torischen Ideal I_A. In unserem Beispiel erhalten wir

$$\left\{F^6 - E^5 \cdot Z,\ E^{15} \cdot H^4 - F^3 \cdot Z^{16},\ E^{10} \cdot F^3 \cdot H^4 - Z^{17}\right\}.$$

Übersetzen wir die Binome in Quadrupel, so bekommen wir genau unsere Testmenge. Daß es kein Zufall ist auf diesem Weg eine Testmenge zu erhalten, sichert uns die allgemeine Theorie. *Eine Gröbnerbasis zu einem torischen Ideal bezüglich einer Monomordnung, die die Kostenfunktion verfeinert, ist stets eine Testmenge für das zugehörige lineare ganzzahlige Optimierungsproblem.* Die Berechnung von Gröbnerbasen ist ein nicht-lineares Problem, da in den Binomen die Exponenten der Veränderlichen nicht mehr alle Eins sind.

7 Muß ich eine Startlösung kennen?

Wir haben im Abschnitt 5 Testmengen verwendet, um von einer zulässigen Lösung zu einer optimalen Lösung zu gelangen, und wir haben im Abschnitt 6 angedeutet, mit welchen Methoden man Testmengen berechnen kann. Aber woher bekommt man denn eigentlich eine *erste* zulässige Lösung, die man dann verbessern will?
In unserem Beispiel hat der Designer eine Lösung vorgegeben. Bei der Aufgabenstellung der Runde 7 wurde diese den Wettbewerbsteilnehmern aber nicht mitgeteilt. Wollten sie den oben beschriebenen Algorithmus anwenden, so mußten sie sich die Startlösung selbst suchen. Ist das schwer? Man sollte erwarten, daß es im allgemeinen weit einfacher ist, irgendeine Lösung zu finden, als von dieser ausgehend die bestmögliche. Weit gefehlt! In vielen Fällen ist es viel schwieriger, erst einmal

überhaupt eine Lösung zu finden! Und das sollte auch nicht unbedingt verwundern. In unserem Beispiel hätten wir beim naiven Ansatz etwa 26 Millionen Quadrupel testen müssen, und nur 7 von diesen waren zulässige Lösungen! Eine von diesen zu *finden*, bedarf schon einiger Mühe!
Für gewöhnlich werden in der ganzzahligen Optimierung hier Methoden der kontinuierlichen Optimierung eingesetzt, um sich schrittweise einer Lösung zu nähern. In unserer Situation, bei der die Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 25 & 100 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie die Inhomogenität

$$b = \begin{pmatrix} 732 \\ 34 \end{pmatrix}$$

keine negativen Einträge enthält, kann man das Problem aber auch anders angehen, indem man die Anzahl der Veränderlichen erhöht. Neben den Veränderlichen E, F, Z und H führen wir die Veränderlichen X und Y ein und erweitern unser Optimierungsproblem (5) zu

$$\begin{aligned}
&\min\{c \cdot X + c \cdot Y + F + H\} \\
&X + 1 \cdot E + 5 \cdot F + 25 \cdot Z + 100 \cdot H = 732 \\
&Y + E + F + Z + H = 34 \\
&X \geq 0,\ Y \geq 0,\ E \geq 0, \quad F \geq 0, \quad Z \geq 0, \quad H \geq 0 \\
&X, Y, E, F, Z, H \in \mathbb{Z}.
\end{aligned} \tag{12}$$

In der Kostenfunktion taucht eine Konstante c auf, die wir geeignet wählen müssen, wobei geeignet wählen heißt, daß sie extrem groß sein soll. Man beachte, daß jede zulässige Lösung (E, F, Z, H) unseres ursprünglichen Problems eine zulässige Lösung $(0, 0, E, F, Z, H)$ des neuen Problems liefert. Zudem wird eine zulässige Lösung des neuen Systems nur dann die Kostenfunktion minimieren können, wenn X und Y beide den Wert Null haben, da die Konstante c in der Kostenfunktion jeden Wert ungleich Null für X und Y bitter bestraft! Die optimale Lösung des neuen Problems wird also von der Form $(0, 0, E, F, Z, H)$ sein und dann wird (E, F, Z, H) zugleich eine optimale Lösung für unser altes Problem (5) sein. Bei diesem neuen Problem ist es aber sehr leicht, eine Startlösung anzugeben: $(732, 34, 0, 0, 0, 0)$ tut's!
Diese Vorgehensweise ist in dem Computeralgebrasystem SINGULAR implementiert. Für unser Beispiel sieht der SINGULAR Code zur Lösung der Aufgabe wie folgt aus:

```
intmat A[2][4]=1,5,25,100,1,1,1,1;
intvec b=732,34;
intvec c=0,1,0,1;
LIB "intprog.lib";
solve_IP(A,b,c,"pct");
```

Er liefert als Ergebnis im Bruchteil einer Sekunde die optimale Lösung:

```
7,5,20,2
```

Durch erhöhen der Anzahl der Veränderlichen und damit der Komplexität der Berechnungen der Gröbnerbasen und Testmengen kann man also das Problem umgehen, keine Startlösung zu kennen. In konkreten Anwendungen kann das ein sehr teurer Preis sein, denn die Berechnung von Gröbnerbasen ist ausgesprochen komplex und eine Veränderliche mehr kann Stunden oder Tage in der Berechnung kosten oder sie praktisch unmöglich machen. In der Regel werden die gängigen Methoden der ganzzahligen und kontinuierlichen Optimierung schneller zum Ziel führen als die Methoden mit Hilfe von Gröbnerbasen. Dennoch bieten sie einen wesentlichen Vorteil. Es ist möglich eine sogenannte *universelle Gröbnerbasis* zu berechnen. Diese ist eine Testmenge für jede Kostenfunktion. Sie einmal zu berechnen erlaubt es, anschließend die Kostenfunktion zu variieren, ohne deshalb den ganzen Algorithmus neu starten zu müssen.
Wer mehr über ganzzahlige Optimierung wissen möchte, kann sich auf den Webseiten der Arbeitsgruppe Optimierung informieren:

`http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/`

Dort ist auch Literatur zu finden, etwa das Vorlesungsskript [Kru06] von Prof. Dr. Sven Krumke. Für eine schöne Einführung in die Anwendung von Gröbnerbasen zur Lösung von Problemen der linearen ganzzahligen Optimierung sei auf die Diplomarbeit von Christine Theis [The99] verwiesen, die die beschriebenen Methoden in SINGULAR implementiert hat. Die Diplomarbeit ist online verfügbar unter dem Link:

`http://loge.math.uni-sb.de/agdecker/FTP/dipl_theis.ps.gz`

Weitere Informationen zur Computeralgebra und ihren Anwendungen finden sich auf den Webseiten der Arbeitsgruppe Algebra, Geometrie und Computeralgebra

`http://www.mathematik.uni-kl.de/~wwwagag`

sowie auf den Webseiten des Computeralgebrasystems SINGULAR

`http://www.singular.uni-kl.de`

References

[Kru06] Sven Krumke, *Integer programming*, Lecture Notes, TU Kaiserslautern, 2006.

[The99] Christine Theis, *Der Buchberger Algorithmus für torische Ideale und sein Anwendung in der ganzzahligen Optimierung*, Master's thesis, Universität des Saarlandes, 1999.