Eberhard Karls Universität Tübingen Sommersemester 2019
Fachbereich Mathematik
PD Dr. Jörg Zintl

Algebraische Kurven

Übungsaufgaben zum 11. Tutorium am 24.07.2019

Aufgabe 40 (Keine Abgabe, Präsenzübung).
Let $C \subset \mathbb{P}^2$ be a smooth cubic projective plane curve. Let "$\oplus$" denote the Abelian group structure on C induced by a given inflection point $\mathcal{O} \in C$. Let $P_1, P_2, P_3 \in C$ be points on C. Describe the complete linear system

$$|P_1 + P_2 - P_3|.$$

Aufgabe 41. (Keine Abgabe, Präsenzübung)
Show that for any compact Riemann surface C and any point $P \in C$, there exists an embedding $\varphi : C \smallsetminus \{P\} \hookrightarrow \mathbb{C}^m$ as a smooth affine variety, for some $m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 42. (Keine Abgabe, Präsenzübung)
Let $\varphi_{|dP|} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^d$ be the embedding of the projective line as a rational normal curve C of degree d, for some point $P \in \mathbb{P}^1$ and some $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Show that C is non-degenerate.

Aufgabe 43. (Keine Abgabe, Präsenzübung)
Show that any Riemann surface C of genus $g = 2$ is hyperelliptic.

You may proceed by proving the following auxiliary claims:

a) There exists an effective canonical divisor K of C.
b) For any curve C of genus $g \geq 1$ and any point $P \in C$ holds $\ell(P) = 1$.
c) The complete linear system $|K|$ is base point free.
d) The holomorphic map $\varphi_{|K|} : C \to \mathbb{P}^1$ is of degree 2.

Keine Abgabe! Besprechung der Aufgaben in der Übung.