

## Analysis 1 / Mathematik für Physiker 1 Übungsblatt 4

**Aufgabe 1.** Gegeben seien zwei nichtleere endliche Mengen  $M$  und  $N$ .

a) Zeigen Sie, daß auch  $M \cap N$  und  $M \cup N$  endlich sind, und es gilt

$$|M \cup N| + |M \cap N| = |M| + |N|.$$

Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst den Fall  $M \cap N = \emptyset$ , und führen Sie dann den allgemeinen Fall darauf zurück.

b) Benutzen Sie vollständige Induktion um zu zeigen, daß  $M \times N$  endlich ist, und es gilt

$$|M \times N| = |M| \cdot |N|.$$

**Aufgabe 2.** Beweisen Sie direkt aus den Axiomen der Multiplikation die folgenden Aussagen:

a) Das Einselement in  $\mathbb{R}$  ist eindeutig bestimmt.

b) Für jedes Element  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist das inverse Element eindeutig bestimmt.

c) Es gilt  $1^{-1} = 1$ .

d) Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \neq 0$  gegeben. Dann gibt es ein eindeutiges Element  $x \in \mathbb{R}$  derart, daß  $a \cdot x = b$  gilt.

e) Für alle Elemente  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt  $(x^{-1})^{-1} = x$ .

**Aufgabe 3.** Beweisen Sie für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  und alle  $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  die *Potenzgesetze*

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m} \quad \text{und} \quad (x^n)^m = x^{n \cdot m} \quad \text{und} \quad x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n.$$

**Aufgabe 4.** Zeigen Sie, daß für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt

a)  $|x| \leq |x + y| + |y|$

b)  $||x| - |y|| \leq |x - y|$

c) für  $x \geq 0$  und  $y \geq 0$  gilt die Äquivalenz

$$\frac{x}{1+x} < \frac{y}{1+y} \iff x < y.$$

**Abgabetermin:** Dienstag, 29.05.2018 bis **10 Uhr**, Übungsleiter-Postkästen in Bau C

**- Beachten Sie bitte die geänderte Uhrzeit! -**