

Elliptische Funktionen und elliptische Kurven

Übungsaufgaben zum Tutorium am 23.10.2018

Aufgabe 1. Sei $f \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom, und sei $G \subset \mathbb{C}^2$ sein Graph. Sei $P = (x_0, y_0) \in G$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) Die x -Achse ist eine Tangente an G in P im Sinne der Analysis;
- (ii) x_0 ist eine mehrfache Nullstelle von f in Sinne der Algebra;
- (iii) $i_P(G, L_Y) \geq 2$ im Sinne der algebraischen Geometrie.

Aufgabe 2. Sei $C \subset \mathbb{C}^2$ eine affine ebene Kurve. Zeigen Sie: $C \neq \emptyset$.

Aufgabe 3. Seien $C, C_1, C_2 \subset \mathbb{C}$ affine ebene Kurven mit $C = C_1 \cup C_2$. Zeigen Sie: $\deg(C) \leq \deg(C_1) + \deg(C_2)$.

Aufgabe 4. Sei $C := V_0(f)$ mit $f(X, Y) := Y^2 - X^3 + 3X - 2$.

a) Skizzieren Sie $C \cap \mathbb{R}^2$.

b) Bestimmen Sie $i_P(C, L)$ für alle Geraden L durch den Punkt $P = (1, 0)$.

Keine Abgabe, nur zur Vorbereitung auf das Tutorium!