

Elliptische Funktionen und elliptische Kurven

Übungsaufgaben zum Tutorium am 13.11.2018

Aufgabe 13

Sei $(C, \mathcal{O})$ eine elliptische Kurve. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

- (1) $\mathcal{O}$ ist ein Wendepunkt von C ;
- (2) drei Punkte $P, Q, R \in C$ sind genau dann kollinear, wenn $P + Q + R = 0$ gilt.

Aufgabe 14

Sei $(C, \mathcal{O})$ eine elliptische Kurve. Es bezeichne $\text{Div}^0(C) \subset \text{Div}(C)$ die Untergruppe der Divisoren vom Grad 0.

- a) Konstruieren Sie einen Gruppenhomomorphismus $\gamma : \text{Div}^0(C) \rightarrow C$.
- b) Bestimmen Sie einen Quotienten J von $\text{Div}^0(C)$ derart, dass $J \cong C$.

Aufgabe 15

Sei $(C, \mathcal{O})$ die elliptische Kurve mit $C = V(Y^2Z - X^3 + XZ^2)$ und $\mathcal{O} = (0 : 1 : 0)$. Bestimmen Sie direkt aus der Konstruktion:

- a) den Punkt $P + Q$, für $P = (-1 : 0 : 1)$ und $Q = (1 + \sqrt{2} : 2 + \sqrt{2} : 1)$;
- b) den Punkt $4R$, mit $R = (i : i - 1 : 1)$.

Aufgabe 16

Sei $(C, \mathcal{O})$ die elliptische Kurve mit $C = V(Y^2Z - X^3 + 3Z^3)$ und $\mathcal{O} = (0 : 1 : 0)$. Bestimmen Sie alle 3-Torsionspunkte von C .

Keine Abgabe, nur zur Vorbereitung auf das Tutorium!