**Eberhard Karls Universität Tübingen** Wintersemester 2018/19
## Fachbereich Mathematik
PD Dr. Jörg Zintl

# Elliptische Funktionen und elliptische Kurven

**Übungsaufgaben zum 5. Tutorium am 20.11.2018**

**Aufgabe 17**
Sei $\varphi_A : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ eine projektive Transformation mit $A \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{C})$. Sei $(C, \mathcal{O})$ eine elliptische Kurve. Sei $C' := \varphi_A^{-1}(C) \subset \mathbb{P}^2$ und $\mathcal{O}' := \varphi_A^{-1}(\mathcal{O}) \in C'$. Zeigen Sie:

$$\varphi_A|C' : \quad (C', \mathcal{O}') \to (C, \mathcal{O})$$

ist ein Isomorphismus von Gruppen.

**Aufgabe 18**
Sei $(C, \mathcal{O})$ eine elliptische Kurve, wobei $\mathcal{O} \in C$ ein Wendepunkt sei. Sei $T \in C$. Konstruieren Sie einen Gruppenisomorphismus

$$(C, \mathcal{O}) \cong (C, T).$$

**Aufgabe 19**
Seien $C := V(X^2 + Y^2 - Z^2) \in \mathbb{P}^2$ und $L := V(Y) \subset \mathbb{P}^2$.
**a)** Zeigen Sie:

$$\varphi : L \to C \quad \text{ mit } \varphi(X : Y : Z) := (2XZ : X^2 - Z^2 : X^2 + Z^2)$$

definiert einen Isomorphismus von Kurven.
**b)** Begründen Sie anschaulich geometrisch, weshalb jede irreduzible Quadrik isomorph ist zur projektiven Geraden $\mathbb{P}^1$.

**Aufgabe 20**
Sei $(C, \mathcal{O})$ die elliptische Kurve in Weierstraß-Normalform mit $C := V(Y^2Z - X^3 + XZ^2)$. Sei

$$[i] : \; C \to C \quad \text{ mit } [i](X : Y : Z) := (-X : -iY : Z).$$

Bestimmen Sie die duale Isogenie zu $\varphi := [1] + [i] \in \mathrm{End}(C)$.

**Keine Abgabe, nur zur Vorbereitung auf das Tutorium!**