

## Elliptische Funktionen und elliptische Kurven

### Übungsaufgaben zum 11. Tutorium am 29.01.2019

#### Aufgabe 39

Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  meromorph. Sei  $z_0 \in U$ ,  $c \in \mathbb{C}$  und  $k \in \mathbb{N}_{>0}$ . Zeigen Sie:

- a) Sei  $z_0$  eine Nullstelle der Ordnung  $k$ . Dann gilt:  $k > 1 \Leftrightarrow f'(z_0) = 0$ .
- b) Sei  $z_0$  eine Nullstelle der Ordnung  $k$ . Dann ist  $z_0$  eine Polstelle der Ordnung  $k$  von  $\frac{1}{f}$ .
- c) Sei  $z_0$  eine Polstelle der Ordnung  $k$ . Dann ist  $z_0$  eine Polstelle der Ordnung  $k$  von  $f + c$ .
- d) Sei  $U = \mathbb{C}$ . Falls  $f$  gerade ist, dann ist  $f$  ungerade.

#### Aufgabe 40

Sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  ein Gitter. Seien  $g_2$  und  $g_3$  die Koeffizienten der Differentialgleichung der zugehörigen Weierstraßschen  $\mathcal{P}$ -Funktion. Zeigen Sie geometrisch, dass das Polynom  $F(S, T) := T^2 - 4S^3 + g_2S + g_3 \in \mathbb{C}[S, T]$  irreduzibel ist.

#### Aufgabe 41

Betrachten Sie das Gitter  $\Omega := \mathbb{Z} + i\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$  mit der dazu gehörigen Weierstraßschen  $\mathcal{P}$ -Funktion, sowie den Koeffizienten  $g_2$  und  $g_3$  ihrer Differentialgleichung. Zeigen Sie:

- a) Für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt  $\mathcal{P}(\bar{z}) = \overline{\mathcal{P}(z)}$ .
- b) Für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt  $\mathcal{P}(iz) = -\mathcal{P}(z)$ .
- c) Für alle  $z \in \mathbb{R} \cup \{z \in \mathbb{C} : z + \bar{z} \in \Omega\}$  gilt  $\mathcal{P}(z) \in \mathbb{R}$ .
- d) Bestimmen Sie

$$\delta := \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}.$$

#### Aufgabe 42

Sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  ein Gitter, und  $T := \mathbb{C}/\Omega$  der zugehörige komplexe Torus. Sei  $m \in \mathbb{Z}$ . Zeigen Sie, dass die Abbildung  $[m] : T \rightarrow T$  mit  $[m](\bar{z}) := \overline{mz}$  stetig und sogar holomorph ist.

**Keine Abgabe, nur zur Vorbereitung auf das Tutorium!**