EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

PD Dr. Jörg Zintl
Felix Dietrich

Algebraische Strukturen

Sommersemester 2018 **16.05.2018**

Übungsblatt 4

Aufgabe 7 (aus dem Abschlusstest Lineare Algebra 2, WS 2017/18)
Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und

$$Z(G) := \{h \in G : \; gh = hg \text{ für alle } g \in G\}.$$

(a) Zeigen Sie bitte, dass $(Z(G), \cdot)$ eine Untergruppe von $(G, \cdot)$ ist.

(b) Zeigen Sie bitte, dass $(Z(G), \cdot)$ eine normale Untergruppe von $(G, \cdot)$ ist.

(c) Zeigen Sie bitte die Äquivalenz

$$G \text{ ist abelsch} \quad \Leftrightarrow \quad G/Z(G) \text{ ist zyklisch.}$$

Aufgabe 8
Gegeben sei die Menge $X := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, sowie die Teilmenge

$$R := \{((p, q), (p', q')) \in X \times X : \; pq' = qp'\}.$$

(a) Zeigen Sie bitte, dass R eine Äquivalenzrelation auf X ist.

(b) Wir schreiben $Q := X/R$, sowie $[p, q] := [(p, q)] \in Q$. Zeigen Sie bitte, für zwei Äquivalenzklassen $[p, q], [r, s] \in Q$ sind

$$[p, q] + [r, s] := [ps + rq, qs] \qquad \text{und} \qquad [p, q] \cdot [r, s] := [pr, qs]$$

wohldefinierte Verknüpfungen.

(c) Zeigen Sie bitte, dass damit $(Q, +)$ und $(Q \setminus \{0_Q\}, \cdot)$ abelsche Gruppen sind, für ein geeignetes Element $0_Q \in Q$.

(d) Zeigen Sie bitte, dass $(Q, +, \cdot)$ ein Körper ist.

(e) Konstruieren Sie bitte einen Körperisomorphismus zwischen $(Q, +, \cdot)$ und $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

Schriftliche Abgabe am 30.05.2018 vor 13:00 in den Fächern im C-Bau auf Ebene 3.
Sie erreichen die Vorlesungshomepage unter
`https://www.math.uni-tuebingen.de/arbeitsbereiche/algebra/lehre/sommersemester-2018/lineare-algebra-2-multilineare-algebra`.