Eberhard Karls Universität Tübingen Wintersemester 2019/20
Fachbereich Mathematik
PD Dr. Jörg Zintl

Lineare Algebra 2: Algebraische Strukturen
- Übungsblatt 1 -

Aufgabe 1. (Präsenzübung, keine Abgabe)
Sei (H, μ) ein Monoid mit dem neutralem Element $e \in H$. Ein Element $h \in H$ heißt *invertierbar*, wenn es Elemente $g, g' \in H$ gibt, für die gilt $\mu(g, h) = e$ und $\mu(h, g') = e$. Sei $G \subseteq H$ die Teilmenge aller invertierbaren Elemente von H. Für Elemente $h_1, h_2 \in G$ definieren wir $\mu'(h_1, h_2) := \mu(h_1, h_2)$. Zeigen Sie, dass (G, μ') eine Gruppe ist

Aufgabe 2. (Präsenzübung, keine Abgabe)
Sei X eine nicht-leere Menge und $\text{Abb}(X, X)$ die Menge der Abbildungen von X in sich selbst. Für zwei Abbildungen $f, g : X \to X$ sei $\mu(f, g) := g \circ f$ die Komposition von Abbildungen.
a) Zeigen Sie: $(\text{Abb}(X, X), \mu)$ ist ein Monoid.
b) Geben Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium an die Menge X dafür an, dass $(\text{Abb}(X, X), \mu)$ eine Gruppe ist.
c) Geben Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium an die Menge X dafür an, dass $(\text{Abb}(X, X), \mu)$ eine abelsche Halbgruppe ist.

Aufgabe 3.
Zeigen Sie: Eine Halbgruppe $(G, \cdot)$ ist genau dann eine Gruppe, wenn für jedes Paar von Elementen $(g, h) \in G \times G$ das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} x \cdot g & = & h \\ g \cdot y & = & h \end{array}$$

eine eindeutige Lösung $(x, y) \in G \times G$ besitzt.

Aufgabe 4.
Gegeben seien die drei *Symbole* e, r und s. Ein *Wort* w ist definiert als eine geordnete Aneinanderreihung von endlich vielen Symbolen. Wird ein Symbol wiederholt, benutzen wir die Potenzschreibweise. Für alle Worte w sollen die folgenden fünf **Ersetzungsregeln** gelten:

$$(1)\ r^5 = e \qquad (2)\ s^2 = e \qquad (3)\ r^4 s = sr \qquad (4)\ we = w \qquad (5)\ ew = w.$$

a) Wie viele verschiedene Wörter, bis auf Ersetzung, gibt es ?
b) Zeigen Sie, wie man zu jedem Wort w ein Wort z findet, so dass für die Verkettung von w und z gilt $wz = e$.
c) Begünden Sie, warum für jedes Wort w für die zehnfache Verkettung $w^{10} = ww \dots w$ von w mit sich selbst gilt $w^{10} = e$.

Abgabetermin für Aufgaben 3&4: Mittwoch, 23.10.2019 vor der Vorlesung