Eberhard Karls Universität Tübingen Wintersemester 2019/20
Fachbereich Mathematik
PD Dr. Jörg Zintl

Lineare Algebra 2: Algebraische Strukturen - Übungsblatt 4 -

Aufgabe 9.
Sei X eine Menge, und sei (G, μ_G) eine abelsche Gruppe.

a) Zeigen Sie, dass die Menge der Abbildungen $\mathrm{Abb}(X, G)$, zusammen mit der naheliegenden ("punktweisen") Verknüpfung, eine Gruppe bildet.

b) Sei Y eine weitere Menge, und sei $g : X \to Y$ eine Abbildung von Mengen. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$g^* : \mathrm{Abb}(Y, G) \to \mathrm{Abb}(X, G), \quad f \mapsto f \circ g$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

c) Sei (H, μ_H) eine weitere Gruppe, und sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi_* : \mathrm{Abb}(X, G) \to \mathrm{Abb}(X, H), \quad f \mapsto \varphi \circ f$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

d) Man definiert

$$\mathrm{Hom}(H, G) := \{g \in \mathrm{Abb}(H, G) : g \text{ ist Gruppenhomomorphismus}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hom}(H, G)$ eine Untergruppe von $\mathrm{Abb}(H, G)$ ist.

Aufgabe 10.
a) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit Untergruppe $(H, \cdot)$. Sei $g \in G$. Zeigen Sie: Eine Nebenklasse gH ist genau dann eine Untergruppe von G, wenn $g \in H$.

b) Sei $\varphi : (G, \cdot) \to (G', \cdot')$ ein Gruppenhomomorphismus. Sei $g \in G$ und $g' := \varphi(g) \in G'$. Zeigen Sie, dass die Urbildmenge von $\{g'\}$ in G als eine Nebenklasse bezüglich einer geeigneten Untergruppe beschrieben werden kann.

Abgabetermin: Mittwoch, 27.11.2019 vor der Vorlesung